



cenidet

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico
Departamento de Ingeniería Electrónica

TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS

**“Identificación de Sistemas en Lazo Cerrado
con Estructura tipo CLOE”**

presentada por

Eduardo Benedicto López Montero
Ing. Electrónico por el I. T. de Veracruz

como requisito para la obtención del grado de:
Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica

Director de tesis:
Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez

Cuernavaca, Morelos, México.

Julio de 2007



cenidet

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico
Departamento de Ingeniería Electrónica

TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS

**“Identificación de Sistemas en Lazo Cerrado
con Estructura tipo CLOE”**

presentada por

Eduardo Benedicto López Montero
Ing. Electrónico por el I. T. de Veracruz

como requisito para la obtención del grado de:
Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica

Director de tesis:

Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez

Jurado:

Dr. Luis Gerardo Vela Valdés - Presidente
Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez - Secretario
Dr. Alejandro Rodríguez Palacios - Vocal
Dr. Carlos Daniel García Beltrán - Vocal Suplente

Cuernavaca, Morelos, México.

Julio de 2007

Dedicatoria

*A mis **Padres**, pilares principales de mi vida, que siempre me brindan su cariño y apoyo incondicional y cuentan con toda mi admiración y respeto.*

*A mis **Hermanitos**, con quienes he compartido grandes momentos de mi vida y me motivan a superarme para ser un mejor ejemplo.*

*A **Lluvia Marisol (chiquita)**, mi compañera y motivación, quien siempre me ha brindado su cariño, apoyo y enorme paciencia.*

Con todo mi amor, para ustedes:

Mis Logros.

“LO QUE HACE QUE UN HOMBRE SE SUPERE NO ES LA INTENSIDAD DE UN SENTIMIENTO ELEVADO, SINO LA DURACIÓN DEL MISMO.”

FRIEDRICH NIETZSCHE.

Agradecimientos

Durante el tiempo en que realicé mis estudios de maestría pude contar con el valioso apoyo de familiares, amigos, compañeros y profesores, a quienes brindo mi más sincero agradecimiento.

A mi asesor el *Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez* le agradezco el haberme guiado en la realización del trabajo de investigación, mediante sus invaluable observaciones y consejos; de igual forma agradezco la confianza y la amistad brindadas.

A los integrantes de mi comité revisor, conformado por el *Dr. Luis Gerardo Vela Valdés*, el *Dr. Alejandro Rodríguez Palacios* y el *Dr. Carlos Daniel García Beltrán*, gracias por sus acertadas observaciones, correcciones y comentarios que contribuyeron a enriquecer este trabajo.

Agradezco también a todos mis profesores del CENIDET, por su labor dentro y fuera de las aulas. A mis compañeros y amigos de potencia y de control, con quienes compartí momentos agradables de trabajo, y la ilusión de algún día ver nuestros estudios concluidos, por esos ratos de sana diversión y por su amistad.

Agradezco profundamente a mis padres *Aleja Montero* y *Javier Paz* por todo el apoyo que siempre me han brindado. Gracias por quererme como sólo ustedes podrían hacerlo.

De igual manera agradezco a *Lluvia Marisol*, por brindarme su apoyo incondicional y muy especialmente por el cariño y paciencia otorgados. Se logró la meta.

Agradezco enormemente al CONACYT por el apoyo económico brindado, sin el cual no hubiera sido posible dedicarme de tiempo completo al desarrollo de este trabajo de tesis.

Agradezco profundamente al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) por proporcionarme los medios necesarios para mi formación académica y por las facilidades otorgadas durante mi estancia.

Sin duda he dejado de mencionar a muchas otras personas que hicieron más placentera mi estancia en Cuernavaca, tanto los que aquí tuve oportunidad de conocer como a los que desde Veracruz y otros lugares siempre estuvieron pendientes de mi. No obstante, a todos ustedes los tengo presentes y les reitero mi más sincero agradecimiento.

Resumen

Actualmente existe un gran número de técnicas para el diseño de controladores basadas en modelo, en este contexto resulta necesario el desarrollo de herramientas innovadoras que permitan la obtención de modelos precisos de sistemas dinámicos a controlar. Es precisamente la *Identificación de Sistemas* una herramienta capaz de proporcionar los métodos necesarios para obtener modelos de sistemas dinámicos, con una buena relación entre esfuerzo de cálculo y calidad de dicho modelo.

En el campo del Control Automático se trabaja con sistemas en *lazo cerrado*; de esta manera resulta útil el desarrollo de algoritmos que permitan la identificación de sistemas en lazo cerrado. Este trabajo presenta un análisis y evaluación de los algoritmos existentes para llevar a cabo un proceso de identificación de sistemas en lazo cerrado con *estructura tipo CLOE*, así como también el desarrollo de técnicas de validación de modelos estimados. Además se presenta un análisis de la reducción del orden de los controladores basándose en este tipo de identificación; lo cual es una ventaja al momento de implementar un controlador.

Este trabajo abarca de igual forma el estudio del algoritmo recursivo de mínimos cuadrados cuando es empleado como algoritmo de adaptación paramétrica (AAP); también se presenta un análisis de la estabilidad, robustez y convergencia a parámetros de dicho algoritmo cuando es empleado como AAP. Así mismo se presenta una técnica sencilla para el diseño de controladores robustos, que se basa en la colocación de polos en lazo cerrado y un ajuste de la función de sensibilidad a la salida. Con base en todo esto se logró el desarrollo de una herramienta de identificación de sistemas en lazo cerrado, que permite la estimación y reajuste de modelos, diseño de controladores y reducción de los mismos; dicha herramienta fue creada a manera de *toolbox* y está disponible en dos versiones, una en MatLab[®] y otra en SciLab[®].

A manera de evaluación de los algoritmos de identificación que se analizaron y estudiaron, así como del toolbox desarrollado, se presentan resultados obtenidos en simulación y de manera experimental.

Abstract

Nowadays there are many techniques for the design of controllers based on models, in this context it is necessary the development of innovating tools that allow the obtaining of accurate models for dynamic systems that are going to be controlled. The *System Identification* is indeed a tool capable of bringing the necessary methods so as to get models of dynamic systems, with a good relationship between model calculation effort and the precision of it.

The Automatic Control area works with *closed loop* systems; for this reason the development of algorithms that allow closed loop identification is useful. In this thesis work an analysis and evaluation of the existing algorithms for the appliance of a closed loop system identification process, with CLOE structure; and the development of validation techniques for estimated models, are presented. An analysis of the controller order reduction based on CLOE identification is also presented too. This reduction is an advantage in the controller implementation case.

In this work a study of the recursive least square algorithm, when it is used as a parameter adaptation algorithm (AAP), was made; and the analysis of the stability, robustness and convergence to parameters of the mentioned algorithm, when is used as a AAP, is presented. Also a simple technique for the design of robust controllers is shown; this technique is based on the closed loop poles placement and the output sensitivity function shaping. Finally a closed loop system identification tool was created, based on all the work done; this identification tool allows model estimation and readjustment, controller order reduction and robust controller design. The mentioned identification tool has a *toolbox* form, and is available in two versions, one in MatLab[®] and another one in SciLab[®].

As a way of evaluating the identification algorithms that were analyzed and studied, and the developed toolbox; some results obtained from simulation and experimental way are shown.

Índice general

Lista de figuras	v
Lista de tablas	ix
Notación	xi
1. Introducción	1
1.1. Concepto de sistema	2
1.2. Modelo de un sistema	2
1.2.1. Tipos de modelos	3
1.3. Planteamiento del problema	3
1.4. Identificación de sistemas	4
1.5. Hipótesis	6
1.6. Motivación y justificación	6
1.7. Objetivos	7
1.7.1. Objetivo General	7
1.7.2. Objetivos Específicos	7
1.8. Estado del arte	7
1.8.1. Identificación en lazo cerrado	9
1.9. Metodología	11
1.10. Consideraciones prácticas	12

1.11. Organización del documento	13
2. Identificación de sistemas en lazo cerrado	15
2.1. Adaptación de parámetros con mínimos cuadrados	18
2.1.1. Algoritmo recursivo de mínimos cuadrados	18
2.1.2. Evolución de la ganancia de adaptación	19
2.1.3. Algoritmo de adaptación paramétrica para identificación con estructura CLOE	21
2.2. Algoritmos de identificación con estructura tipo CLOE	23
2.2.1. Algoritmo CLOE	23
2.2.2. Algoritmos F-CLOE y AF-CLOE	25
2.2.3. Algoritmo X-CLOE	26
2.2.4. Algoritmo G-CLOE	28
2.3. Convergencia de parámetros	30
2.3.1. Convergencia en un ambiente determinístico	30
2.3.2. Convergencia en un ambiente estocástico	32
2.4. Robustez del algoritmo recursivo de mínimos cuadrados	34
2.5. Distribución del bias	35
2.5.1. Espectro de una señal	36
2.5.2. Análisis de la distribución del bias	36
2.6. Conclusiones del capítulo	40
3. Validación de modelos estimados	43
3.1. Validación en el dominio del tiempo	43
3.1.1. Índices de desempeño	44
3.2. Validación en el dominio de la frecuencia	46
3.3. Validación mediante la cercanía de polos en lazo cerrado	47

3.3.1. Distancia normalizada de Vinnicombe	48
3.4. Validación estadística	49
3.5. Ejemplo de validación de un modelo estimado	52
3.6. Conclusiones del capítulo	57
4. Reducción del orden del controlador	59
4.1. Reducción del orden de los controladores	59
4.1.1. Reducción indirecta	60
4.1.2. Reducción directa	60
4.2. Algoritmo de identificación CLOM	63
4.2.1. Algoritmo CLOM	65
4.3. Algoritmo de identificación CLIM	66
4.3.1. Algoritmo CLIM	68
4.4. Cálculo de un controlador robusto	69
4.4.1. Colocación de polos con calibración de la función de sensibilidad a la salida	69
4.4.2. Márgenes de robustez	71
4.5. Conclusiones del capítulo	77
5. Implementación y evaluación de los algoritmos	79
5.1. Proceso de identificación en lazo cerrado	79
5.2. Resultados en simulación	80
5.2.1. Descripción del sistema simulado	80
5.2.2. Identificación en lazo cerrado	82
5.2.3. Validación de los modelos estimados	84
5.2.4. Reducción del orden del controlador	89
5.3. Resultados experimentales	92

5.3.1. Descripción del sistema experimental	92
5.3.2. Identificación en lazo abierto	94
5.3.3. Cálculo del controlador	95
5.3.4. Identificación en lazo cerrado	96
5.3.5. Validación de los modelos estimados	97
5.3.6. Cálculo del nuevo controlador	101
5.3.7. Validación del sistema estimado con el nuevo controlador	102
5.4. Conclusiones del capítulo	105
6. Observaciones y conclusiones generales	107
6.1. Conclusiones generales	107
6.2. Trabajos futuros propuestos	112
Referencias	113
A. Funciones contenidas dentro del toolbox de identificación	117
A.1. Listado de funciones	117
A.2. Manual de usuario	119
B. Definición de una función de transferencia discreta ERP	133
C. Descripción de una señal binaria pseudo aleatoria (SBPA)	135
C.1. Generación de una SBPA	135
D. Distribución del error de predicción en lazo cerrado	139

Lista de figuras

1.1. <i>Sistema dinámico.</i>	2
1.2. <i>Lazo de identificación de sistemas.</i>	5
1.3. <i>Esquema de identificación en lazo cerrado.</i>	10
2.1. <i>Esquema de identificación en lazo cerrado (RST).</i>	16
3.1. <i>Configuración en lazo abierto.</i>	46
3.2. <i>Identificación en lazo abierto.</i>	47
3.3. <i>Sistema simulado.</i>	52
3.4. <i>Comparación temporal (escalón e impulso).</i>	53
3.5. <i>Gráficas de Bode (magnitud y fase).</i>	55
3.6. <i>Comparación de polos en lazo cerrado.</i>	55
3.7. <i>Correlación cruzada entre: $\varepsilon_{LC}(t)-\hat{y}(t)$, $\varepsilon_{LC}(t)-\hat{u}(t)$.</i>	56
4.1. <i>Esquema de identificación A.</i>	61
4.2. <i>Esquema de identificación B.</i>	61
4.3. <i>Identificación CLOM.</i>	62
4.4. <i>Identificación CLIM.</i>	62
4.5. <i>Esquema de identificación CLOM.</i>	63
4.6. <i>Esquema de identificación CLIM.</i>	66
4.7. <i>Sistema en lazo cerrado.</i>	71

4.8. Gráfica de Nyquist de H_{LA}	72
4.9. Márgenes de robustez.	74
4.10. Márgenes de robustez.	77
5.1. Sistema simulado en lazo cerrado.	80
5.2. Respuesta ante un escalón unitario en lazo abierto.	81
5.3. Respuesta en lazo cerrado ante un escalón unitario.	82
5.4. Datos de identificación en lazo cerrado.	83
5.5. Comparación de respuestas temporales, modelos: nominal-estimado [1] .	84
5.6. Comparación de respuestas temporales, modelos: nominal-estimado [2] .	85
5.7. Cercanía de polos y respuesta en frecuencia en lazo cerrado [1]	86
5.8. Cercanía de polos y respuesta en frecuencia en lazo cerrado [2]	86
5.9. Correlación cruzada: $\varepsilon_{LC}(t)-\hat{y}(t)$, $\varepsilon_{LC}(t)-\hat{u}(t)$. Modelo estimado [1] . . .	87
5.10. Correlación cruzada: $\varepsilon_{LC}(t)-\hat{y}(t)$, $\varepsilon_{LC}(t)-\hat{u}(t)$. Modelo estimado [2] . . .	88
5.11. Respuestas en lazo cerrado.	90
5.12. Comparación de la respuesta en frecuencia.	91
5.13. Comparación entre funciones de sensibilidad a la salida.	91
5.14. Filtro pasa bajas de segundo orden.	93
5.15. Respuesta del filtro ante un escalón unitario.	93
5.16. SBPA aplicada al filtro en lazo abierto.	94
5.17. Comparación ante una entrada tipo escalón.	95
5.18. Función de sensibilidad a la salida.	95
5.19. Identificación en lazo cerrado.	96
5.20. Comparación ante una entrada tipo escalón.	97
5.21. Comparación ante entradas de tipo escalón.	98
5.22. Error ante una entrada tipo escalón unitario.	99

5.23. Polos en lazo cerrado y respuesta en frecuencia.	100
5.24. Correlación cruzada entre $\varepsilon_{LC}(t)-\hat{y}(t)$ y $\varepsilon_{LC}(t)-\hat{u}(t)$	101
5.25. Función de sensibilidad a la salida.	102
5.26. Comparación ante entrada tipo escalón unitario en lazo cerrado.	102
5.27. Error ante una entrada tipo escalón unitario.	103
5.28. Polos y respuesta en frecuencia.	104
5.29. Correlación cruzada entre la salida estimada y el error.	104
6.1. Procedimiento de identificación en lazo cerrado.	111
C.1. Pulso más ancho	137
D.1. Distribución del error 1.	140
D.2. Distribución del error 2.	140

Lista de tablas

3.1. Intervalos de confianza.	52
3.2. Índices de desempeño.	54
5.1. Índices de desempeño del sistema simulado.	85
5.2. Índices de desempeño de los controladores.	90
5.3. Índices de desempeño en lazo abierto	98
5.4. Índices de desempeño en lazo cerrado	99
5.5. Índices de desempeño en lazo cerrado (nuevo controlador).	103
6.1. Características de los algoritmos.	109
A.1. Funciones en MatLab [®]	117
A.2. Funciones en SciLab [®]	118
C.1. Generación de una SBPA.	136

Notación

Letras mayúsculas

A	Denominador del modelo discreto de la planta.
A^*	Polinomio que contiene los coeficientes del denominador de la planta.
B	Numerador del modelo discreto de la planta.
B^*	Polinomio que contiene los coeficientes del numerador de la planta.
C	Numerador de la dinámica del ruido.
C^*	Polinomio que contiene los coeficientes de C .
C_1	Límite máximo del cuadrado de $\nu(t + 1)$.
C_2	Límite máximo del vector de parámetros estimados.
D	Polinomio del denominador de la dinámica del ruido.
D^*	Polinomio que contiene los coeficientes de D .
D_c	Dominio de convergencia.
D_s	Dominio al que pertenece el vector de parámetros estimados.
D_Ω	Polinomio en tiempo discreto (denominador).
E	Función de transferencia discreta.
E'	Función de transferencia discreta.
F	Ganancia de adaptación paramétrica.
G	Modelo discreto de la planta.
GI	Valor de la diagonal principal de la ganancia de adaptación.
H	Polinomio extendido del algoritmo X-CLOE.
H^*	Polinomio que contiene los coeficientes de H .
H_{LA}	Función de transferencia en lazo abierto.
H_R	Parte fija del polinomio R del controlador.

H_S	Parte fija del polinomio S del controlador.
K	Modelo discreto del controlador.
L	Longitud máxima de una SBPA.
N	Número total de muestras.
N_Ω	Polinomio en tiempo discreto (numerador).
N_b	Número de bits para la generación de una SBPA.
P	Polinomio característico del sistema en lazo cerrado.
P_D	Polinomio que contiene los polos auxiliares en lazo cerrado.
P_F	Polinomio que contiene los polos en lazo cerrado deseados.
R	Polinomio R de un controlador RST digital.
R'	Parte móvil del polinomio R del controlador, coeficientes del numerador.
R_s	Función de auto correlación.
R_{xy}	Covarianza entre dos conjuntos de datos.
R_N	Correlación cruzada.
S	Polinomio S de un controlador RST digital.
S'	Parte móvil del polinomio S del controlador.
S^*	Polinomio que contiene los coeficientes del denominador del controlador.
S_{yp}	Función de sensibilidad a la salida.
$S_{ z <1}$	Conjunto de polinomios en z^{-1} cuyas raíces se encuentran dentro de $ z < 1$.
T	Polinomio T de un controlador RST digital.
T_m	Tiempo de muestreo.
W	Función de transferencia del ruido.
X	Función de transferencia estable.

Letras minúsculas

$a_1 \dots$	Coefficientes del denominador de la planta.
$b_1 \dots$	Coefficientes del numerador de la planta.
$c_1 \dots$	Coefficientes del polinomio C^* .

d	Retardo puro de la planta.
$d_1 \dots$	Coefficientes del polinomio D^* .
e	Ruido blanco gaussiano, señal de error.
f_{clock}	Frecuencia de reloj.
f_m	Frecuencia de muestreo.
h	Coefficientes del polinomio H^* .
j	Coefficiente de correlación.
n	Orden de un polinomio.
n_A	Orden del denominador de la planta.
n_B	Orden del numerador de la planta.
n_C	Orden del polinomio C .
n_D	Orden del polinomio D .
n_H	Orden del polinomio H .
n_{H_R}	Orden de la parte fija del polinomio R del controlador.
n_{H_S}	Orden de la parte fija del polinomio S del controlador.
n_K	Número de muestra.
n_{p_i}	Número de polos inestables de una función de transferencia.
n_R	Orden del polinomio R del controlador.
$n_{R'}$	Orden de la parte móvil del polinomio R del controlador
n_S	Orden del polinomio S del controlador.
$n_{S'}$	Orden de la parte móvil del polinomio S del controlador
n_{z_i}	Número de ceros inestables de una función de transferencia.
p	Señal generada por perturbaciones.
q^{-1}	Operador de desplazamiento hacia atrás.
r	Señal de referencia.
$r_1 \dots$	Coefficientes del polinomio R' del controlador.
r_u	Señal de referencia filtrada.
$s_1 \dots$	Coefficientes del polinomio S^* del controlador.
s_x	Señal quasi-estacionaria.
t	Tiempo.
t_r	Tiempo de subida.
u	Señal de control real.
u'	Señal de control filtrada con las partes fijas del controlador.
w	Señal de ruido.

w_s	Señal quasi-estacionaria.
x	Señal auxiliar.
x'	Señal auxiliar filtrada.
y	Salida real de un proceso.
y'	Salida en lazo cerrado filtrada con las partes fijas del controlador.
z	Variable compleja.

Letras griegas

α	Polinomio extendido del algoritmo G-CLOE.
α_k	Factor de ganancia de adaptación.
α_0	Cociente formado por λ_1/λ_2 .
β	Nivel de confianza.
Γ	Vector de parámetros del controlador.
γ	Vector de observación (señales estimadas) del controlador.
ΔG	Margen de ganancia.
ΔM	Margen de módulo.
$\Delta \tau$	Margen de retardo.
$\Delta \Phi$	Margen de fase.
δ	Parámetro de ajuste para la ganancia de adaptación inicial.
δ_v	Distancia normalizada de Vinnicombe.
ε^2	Límite máximo del cuadrado de la señal de referencia.
ε_{LC}	Error de predicción en lazo cerrado.
η	Parte no modelada de la dinámica de un sistema más ruido.
Θ	Vector de coeficientes estimados del algoritmo recursivo de mínimos cuadrados.
θ	Vector de parámetros de la planta.
κ^2	Límite máximo del cuadrado de η .
Λ	Diferencia normalizada entre dos funciones de transferencia.
λ	Número real entre cero y dos.
λ_0	Parámetro de ajuste 0 del algoritmo de adaptación paramétrica.
λ_1	Parámetro de ajuste 1 del algoritmo de adaptación paramétrica.

λ_2	Parámetro de ajuste 2 del algoritmo de adaptación paramétrica.
ν	Error de adaptación paramétrica.
σ	Distribución de un conjunto de datos.
Υ	Espectro de una señal.
Φ	Vector de regresión para el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados.
$\angle\Phi$	Desfasamiento en grados.
ϕ	Vector de observación (señales estimadas) de la planta.
φ	Vector de observación (señales reales) de la planta.
χ	Polinomio empleado para la generación de una SBPA.
Ψ	Vector de observación (señales reales) del controlador.
Ω	Función de transferencia discreta.
ω	Frecuencia en radianes.
ω_{fc}	Frecuencia de cruce del círculo unitario.

Subíndices

$CLIM$	Polinomio obtenido con el algoritmo CLIM.
$CLOM$	Polinomio obtenido con el algoritmo CLOM.
den	denominador.
e	extendido estimado.
eO	extendido real.
num	numerador.
f	filtrado.

Marcas diacríticas

$\hat{}$	Estimado.
\circ	A priori.
T	Transpuesto.
$-$	Media.

Abreviaturas y acrónimos

<i>AAP</i>	Algoritmo de Adaptación Paramétrica.
<i>AF – CLOE</i>	Algoritmo CLOE filtrado adaptable.
<i>CENIDET</i>	Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico.
<i>CLIM</i>	Algoritmo de comparación de la entrada en lazo cerrado.
<i>CLOE</i>	Algoritmo de error de salida en lazo cerrado.
<i>CLOM</i>	Algoritmo de comparación de la salida en lazo cerrado.
<i>ERP</i>	Estrictamente Real Positiva.
<i>F – CLOE</i>	Algoritmo CLOE filtrado.
<i>G – CLOE</i>	Algoritmo CLOE generalizado.
<i>IAE</i>	Integral del error absoluto.
<i>ISE</i>	Integral del error cuadrático.
<i>ISTSE</i>	Integral del tiempo cuadrático por el error cuadrático.
<i>ITAE</i>	Integral del tiempo por el error absoluto.
<i>ITSE</i>	Integral del tiempo por el error cuadrático.
<i>MCE</i>	Error medio cuadrático.
<i>MCR</i>	Algoritmo recursivo de mínimos cuadrados.
<i>ME</i>	Modelo Estimado.
<i>MIMO</i>	Varias entradas, varias salidas.
<i>MISO</i>	Varias entradas, una salida.
<i>MSE</i>	Media del error cuadrático.
<i>OE</i>	Error a la salida.
<i>OLOE</i>	Algoritmo de Error de salida en lazo abierto.
<i>SBPA</i>	Señal Binaria Pseudo Aleatoria.
<i>SIMO</i>	Una entrada, varias salidas.
<i>SISO</i>	Una entrada, una salida.
<i>X – CLOE</i>	Algoritmo CLOE extendido.

Capítulo 1

Introducción

Una tarea muy importante en control es la obtención de modelos de sistemas dinámicos, esto debido entre otras cosas a la gran cantidad de técnicas para el diseño de controladores basados en modelo. Es precisamente la identificación de sistemas una herramienta con la cual se pueden estimar modelos, con base en datos (entrada - salida) recolectados de dichos sistemas. Esta herramienta brinda una buena relación entre esfuerzo de obtención de un modelo y calidad del mismo.

En este trabajo se presenta un análisis y evaluación de los algoritmos existentes para llevar a cabo un proceso de identificación de sistemas en lazo cerrado con estructura tipo CLOE, así como también el desarrollo de técnicas de validación de modelos estimados. De la misma manera se incluye el análisis de la reducción del orden de los controladores con base en este tipo de identificación; lo cual representa una ventaja al momento de implementar controladores.

En este trabajo también se presenta el estudio del algoritmo recursivo de mínimos cuadrados, que abarca un análisis de la estabilidad, robustez y convergencia a parámetros de dicho algoritmo cuando es empleado como algoritmo de adaptación paramétrica (AAP). Así mismo se presenta una técnica sencilla para el diseño de controladores robustos, que se basa en la colocación de polos en lazo cerrado y un ajuste de la función de sensibilidad a la salida. Con base en todo esto se logró el desarrollo de una herramienta de identificación de sistemas en lazo cerrado, que permite la estimación y reajuste de modelos, diseño de controladores y reducción de los mismos; dicha herramienta fue creada a manera de “toolbox” (en MatLab[®] y SciLab[®]).

Para mostrar la evaluación de los algoritmos de identificación que fueron analizados y estudiados, así como del toolbox que se desarrolló, se incluyeron en el presente documento algunos resultados obtenidos en simulación y de manera experimental.

1.1. Concepto de sistema

Un sistema dinámico es toda realidad en la que interactúan variables de diferentes tipos que producen señales. Las señales que resultan de mayor interés para un observador se denominan salidas del sistema. Existen otras señales de gran importancia denominadas señales de entrada, algunas de las cuales pueden ser manipuladas libremente por dicho observador, para de esta manera producir alguna salida deseada; mientras que otras señales de entrada no pueden ser manipuladas, pero se conoce su existencia. El resto de señales que influyen en la evolución de las salidas y que tampoco pueden ser manipuladas se denominan perturbaciones. Lo anterior se ilustra en la Figura 1.1.

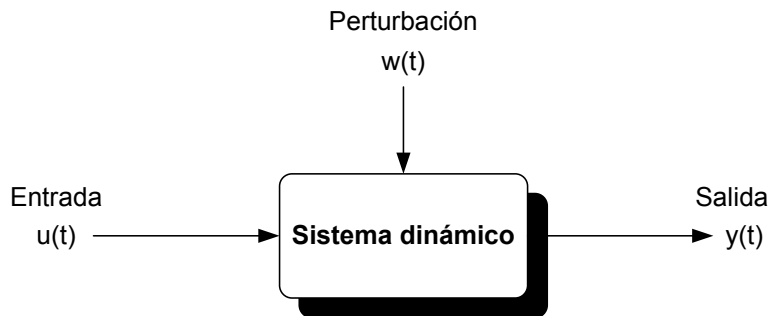


Figura 1.1: *Sistema dinámico.*

De la Figura 1.1, se tiene que $u(t)$ representa la entrada o el vector de entradas al sistema, $y(t)$ representa la salida o vector de salidas del sistema y $w(t)$ es el término que engloba al conjunto de señales (ruido) provocado por perturbaciones.

1.2. Modelo de un sistema

Cuando se hace necesario conocer el comportamiento de un sistema en unas determinadas condiciones y ante unas determinadas entradas, se puede recurrir a la experimentación sobre dicho sistema y a la observación de sus salidas. Sin embargo, en muchos casos la experimentación puede resultar compleja o incluso imposible de llevar a cabo, lo que hace necesario trabajar con algún tipo de representación que se aproxime a la realidad, y a la que se conoce como modelo.

El objetivo básico de éste será el de representar la relación existente entre las diversas señales con las que trabaja o interactúa el sistema (señales de entrada y salida, disturbios); un ejemplo de esto sería el de representar la respuesta (señal de salida) de un sistema o proceso ante una determinada señal de excitación o control (entrada).

Básicamente, un modelo es una herramienta que permite predecir el comportamiento de un sistema sin necesidad de experimentar sobre él.

1.2.1. Tipos de modelos

Existen varios tipos de modelos para sistemas dinámicos, mismos que se pueden clasificar en tres diferentes, los cuales se describen a continuación.

- *Modelos empíricos.* Estos son los que se obtienen al caracterizar un sistema o proceso mediante un gráfico o tabla, que describa sus propiedades dinámicas mediante un número finito de parámetros. Por ejemplo, un sistema lineal puede quedar definido mediante su respuesta al impulso o al escalón, o bien mediante su respuesta en frecuencia. Lo que se podría definir también como un ajuste de curvas.
- *Modelos Semi-empíricos.* Este tipo de modelos se valen del uso de leyes físicas (naturales) para describir la dinámica de un sistema, lo que equivaldría a definir la estructura de un modelo; y las partes desconocidas se ajustan (dichas partes desconocidas pueden ser los coeficientes de una función de transferencia). A este tipo de modelos corresponden aquellos obtenidos a través de un proceso de identificación.
- *Modelos rígidos.* Estos modelos se obtienen al aplicar un método analítico, en el que se recurre a leyes básicas de la física para describir el comportamiento dinámico de un fenómeno o proceso.

1.3. Planteamiento del problema

En el área de Control Automático se han desarrollado varias técnicas de control basadas en modelo, muchas de las cuales no han sido aplicadas (o bien aplicadas) en la realidad debido a la carencia de modelos.

Muchas veces resulta necesario conocer muy bien el sistema a modelar para poder intuir un modelo en poco tiempo, con base a las respuestas del sistema o proceso, lo cual resulta difícil; otra manera de obtener un modelo es mediante la realización de un análisis, en el que se recurran a leyes básicas de la física para describir el comportamiento dinámico de un fenómeno o proceso; dicho análisis resulta muy complicado cuando se trabaja con sistemas complejos, aunado a esto se encuentra la posible necesidad de volver a modelar el sistema debido, por ejemplo, a: envejecimiento de los componentes que lo componen, ajustes al sistema, etc.

Si bien se puede llegar a desarrollar habilidad para la determinación de modelos mediante el uso de leyes físicas, no siempre se podrá contar con estos en un intervalo corto de tiempo.

La identificación de sistemas es una técnica que fue desarrollada para la estimación de modelos de sistemas dinámicos [Gev04], la cual proporciona una buena relación entre precisión del modelo y esfuerzo de cálculo. La identificación de sistemas se trata de un método experimental que permite obtener el modelo de un sistema a partir de datos reales recogidos del proceso que está bajo estudio; por lo que con esta técnica se puede estimar de manera rápida un modelo, esto si se tienen las herramientas a la mano para poder aplicar directamente algún algoritmo de identificación (por ejemplo: algún toolbox).

Sin embargo la mayoría de la teoría existente para la identificación trata sistemas en lazo abierto [Lju99], y en el campo de Control Automático se trabaja con sistemas en lazo cerrado (en presencia de un controlador o regulador).

1.4. Identificación de sistemas

La identificación es una herramienta utilizada para obtener modelos matemáticos aproximados de sistemas dinámicos a partir de datos (señales) recolectados de dichos sistemas ó procesos. Para llevar a cabo la identificación de algún sistema se debe de seguir un procedimiento sencillo, que comprende los siguientes pasos:

1. *Obtención de datos de entrada - salida.* Para ello se debe excitar el sistema mediante la aplicación de una señal de entrada y registrar la evolución de sus entradas y salidas durante un intervalo de tiempo.
2. *Tratamiento previo de los datos registrados.* Los datos registrados están generalmente acompañados de ruidos indeseados u otro tipo de imperfecciones que puede ser necesario corregir antes de iniciar la identificación del modelo. Se trata, por tanto, de “preparar” los datos para facilitar y mejorar el proceso de identificación.
3. *Elección de la estructura del modelo.* Si el modelo que se desea obtener es un modelo paramétrico, el primer paso es determinar la estructura deseada para dicho modelo. Este punto se facilita en gran medida si se tiene un cierto conocimiento sobre las leyes físicas que rigen el proceso.
4. *Obtención de los parámetros del modelo.* A continuación se procede a la estimación de los parámetros de la estructura que mejor ajustan la respuesta del modelo a los datos de entrada-salida obtenidos experimentalmente.

5. *Validación del modelo.* El último paso consiste en determinar si el modelo obtenido satisface el grado de exactitud requerido para la aplicación en cuestión. Si se llega a la conclusión de que el modelo no es válido, se deben revisar los siguientes aspectos como posibles causas:
- El conjunto de datos de entrada-salida no proporciona suficiente información sobre la dinámica del sistema.
 - La estructura escogida no es capaz de proporcionar una buena descripción del modelo.
 - El criterio de ajuste de parámetros seleccionado no es el más adecuado.

La identificación de sistemas generalmente se lleva a cabo en lazo abierto y tiene un flujo lógico natural, éste se muestra en la Figura 1.2 (ver [Lju99]). Es común que el primer modelo que se obtenga como “el mejor” del conjunto de modelos no pase la validación, es por eso que una buena identificación de un sistema en particular se lleva a cabo mediante un proceso iterativo.

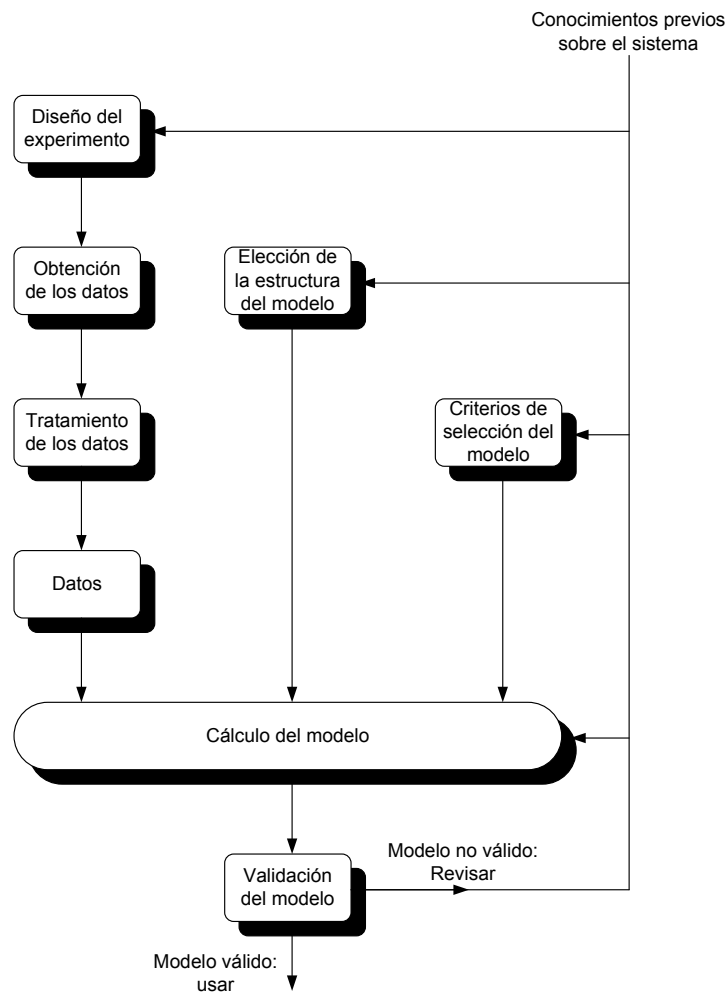


Figura 1.2: Lazo de identificación de sistemas.

Cabe hacer mención que el modelo arrojado mediante un proceso de identificación será una aproximación al modelo real (el cual no es posible obtener por ningún método conocido en la actualidad), y qué tanto se asemeje a éste dependerá de varios factores como lo son: obtención de datos adecuados, región de operación, conjunto de estructuras seleccionadas, etc. La identificación de sistemas es una buena alternativa para la obtención de modelos, y es relativamente más rápida que el modelado “clásico” basado en un análisis formal y matemático de las propiedades físicas del sistema.

1.5. Hipótesis

Con base en lo expuesto en las secciones anteriores y dadas las ventajas de la identificación de sistemas en lazo cerrado, se plantea la siguiente hipótesis:

Con el análisis y la asimilación de la identificación de sistemas en lazo cerrado con estructura tipo CLOE, se podrá desarrollar una herramienta que permita llevar a cabo la estimación y reajuste de modelos de sistemas dinámicos, la reducción del orden de controladores y el cálculo de los mismos.

1.6. Motivación y justificación

Existen algunos casos en que la identificación en lazo abierto no es posible o no es lo más apropiado, por ejemplo: debido a las características propias del proceso (con integrador o inestable), cuando la planta está en operación y cuenta ya con un regulador, y para realizar un reajuste del controlador en busca de mejores desempeños [VdHS95].

Es entonces cuando la aplicación de una identificación en lazo cerrado se hace necesaria; dicho tipo de identificación permite a su vez llevar a cabo el reajuste de modelos de sistemas, obtenidos previamente ya sea por identificación en lazo abierto o por algún otro método; también puede proporcionar la opción de reducir el orden del controlador, cuando ésta sea posible [Lan04]. Aunque, de igual forma, resulta interesante aplicar este tipo de identificación en aquellos casos donde la identificación de sistemas en lazo abierto sea posible, ya que generalmente el modelo de un sistema es empleado para fines de control.

Sin embargo no existe una teoría unificada sobre la identificación en lazo cerrado. No hay disponible para la educación ningún programa ó “toolbox” para efectuarla. Existen sólo esfuerzos comerciales como CLID[®] de ADAPTECH[®], solución totalmente

cerrada y fuera del presupuesto de muchos académicos.

En la práctica, si algún estudiante quiere aprender y llevar a cabo una identificación en lazo cerrado, simplemente no hay las herramientas disponibles [KL98].

1.7. Objetivos

1.7.1. Objetivo General

El objetivo principal de este proyecto es asimilar la tecnología de la identificación en lazo cerrado, y de manera específica, la basada en la estructura tipo CLOE (*Closed-Loop Output Error*).

1.7.2. Objetivos Específicos

1. Estudiar y asimilar diferentes maneras de realizar la identificación en lazo cerrado.
2. Estudiar las diversas variantes de la identificación CLOE.
3. Establecer una metodología para realizar identificación CLOE.
4. Hacer un análisis de la distribución del *Bias*
5. Analizar técnicas de validación de modelos, obtenidos mediante un proceso de identificación en lazo cerrado.
6. Estudio del diseño de controladores, que serán necesarios para la identificación en lazo cerrado.
7. Realizar diversas pruebas con datos de identificación (tomados de la literatura y experimentalmente).
8. Llevar a cabo un reajuste de modelos con base en los resultados de la identificación en lazo cerrado.
9. Reducir el orden de los reguladores (cuando sea viable, y con base en los resultados de la identificación).
10. Elaborar un toolbox de identificación en lazo cerrado con estructura tipo CLOE en MatLab[®] y SciLab[®].

1.8. Estado del arte

El desarrollo de la teoría de identificación surgió al rededor de 1960; mucho del trabajo desarrollado en identificación fue llevado a cabo por comunidades estadistas y

de series de tiempo. No obstante, la teoría estadística para la estimación de parámetros tiene sus raíces en los trabajos de Gauss (1809) y Fisher (1912), mucha de la teoría de procesos estocásticos estacionarios fue desarrollada durante el periodo comprendido entre 1920 y 1970.

Gracias a la publicación de dos importantes artículos [HK65] y [AsB65], se podría considerar al año 1965 como la fecha de nacimiento de la teoría de identificación dentro de la comunidad de control; ambos artículos sentaron las bases para el desarrollo de dos técnicas de identificación, las cuales dominan el campo en la actualidad [Gev04]: identificación en sub-espacios e identificación mediante la predicción del error. La primera está basada en técnicas de proyección dentro del espacio Euclidiano, y la segunda está basada en el criterio de minimización de dependencia a parámetros (la cual es el punto de partida de la identificación paramétrica).

Box y Jenkins, en 1970, publicaron su libro “Análisis de series de tiempo, pronóstico y control” (ver [BJ70]), el cual dio un mayor ímpetu a las aplicaciones de la identificación. Este libro proporcionaba una metodología más o menos completa para llevar a cabo la identificación, la cual comenzaba desde el análisis de los datos hasta la estimación de un modelo.

El libro de Box y Jenkins fue la referencia de mayor calidad, en lo concerniente a la identificación de sistemas, durante un periodo aproximado de 15 años [Gev04]. Otras referencias importantes de esa época fueron el trabajo realizado por [AsE71] y “Cuestiones especiales en identificación de sistemas y en análisis de series de tiempo”, esta última publicada por la IEEE en Asuntos referentes al Control Automático en diciembre de 1974. En el artículo de [AsE71] se plantearon de manera abierta algunas interrogantes de aquel entonces, una de estas interrogantes era la identificación de sistemas en lazo cerrado.

A mediados de la década de los setenta el método basado en la predicción del error dominaba por completo la teoría de identificación, así como sus aplicaciones; luego entonces, gran parte de las investigaciones desarrolladas durante este periodo se enfocaron en resolver los problemas existentes relacionados con la identificación de sistemas multivariados y sistemas en lazo cerrado. Sin embargo, las investigaciones realizadas estaban concentradas en la búsqueda del “modelo real del sistema”; en la actualidad no se conoce método alguno que permita encontrar el modelo verdadero de un sistema dinámico.

Fue a finales de los 70's, en [AMH78] y [LC79], cuando se vislumbraron las primeras intenciones de considerar a la identificación de sistemas como una teoría de aproximación al “sistema verdadero”. Luego entonces, la comunidad ocupada en identificación se dedicó a la búsqueda y caracterización de la “mejor aproximación” al sistema verdadero

en lugar de la búsqueda del “sistema verdadero”.

En los 80’s la identificación de sistemas se consideró como un problema de diseño. Con el propósito de obtener un modelo identificado de calidad, se pueden ajustar ciertas características, tales como: entendimiento de los efectos de las condiciones experimentales, la elección de un tipo de estructura para el modelo, la determinación del criterio de selección, etc; los criterios utilizados para la identificación del modelo dependerán de la finalidad de dicho modelo. El libro de Ljung “Identificación de sistemas: teoría para el usuario” (ver [Lju99]) ha tenido un fuerte impacto dentro de la comunidad de ingenieros dedicada a la identificación; en dicho libro se plantea claramente el punto de vista de la identificación como problema de diseño, donde el uso final del modelo representa un rol central. Este punto de vista es muy diferente respecto a aquel establecido en la literatura de estadística, en el cual se buscaba que el modelo se acercara lo más posible al sistema real.

La identificación de sistemas aplicada a control se convirtió en un tópico de gran importancia a partir de 1990, para entonces la identificación basada en la predicción del error había completamente acaparado el campo. Durante el transcurso de la década de los 90’s se abrieron y se reabrieron nuevas áreas de interés, tales como: diseño del experimento, identificación en lazo cerrado, identificación en el dominio de la frecuencia, y análisis y diseño de control robusto basado en datos.

1.8.1. Identificación en lazo cerrado

Por algún motivo, el trabajo que comenzó en los años 70’s en lo referente a la identificación en lazo cerrado se detuvo al toparse con la interrogante de la “identificabilidad”; problemas referentes a la distribución del error y varianza tampoco habían sido resueltos.

La identificación en lazo cerrado otorga beneficios cuando se pretende utilizar el modelo para el diseño del controlador; sin embargo, hasta finales de los 80’s se prefería evitar la identificación en lazo cerrado [Gev04]. En la identificación para control con modelos de orden reducido, la conexión requerida entre el desempeño del criterio de control (en lazo cerrado) y el criterio de identificación, establece la necesidad de llevar a cabo la identificación en lazo cerrado.

Una de las primeras soluciones propuestas para la identificación en lazo cerrado fue desarrollada en [SLG76]; los mismos investigadores demostraron que se puede realizar la identificación en lazo cerrado utilizando varios de los métodos empleados para la identificación recursiva en lazo abierto, llevando a cabo un apropiado filtrado de los datos. Esta última forma de llevar a cabo la identificación, en lazo cerrado, es la que

ha sido utilizada en control adaptable indirecto para la estimación de parámetros del modelo.

En [LR94] [LK96], [LK97] y [Lan02] se presentan un conjunto de algoritmos recursivos para llevar a cabo la identificación en lazo cerrado, todos éstos son diversas variaciones del algoritmo CLOE. En años recientes se ha retomado un alto interés en la identificación de modelos de procesos en el contexto de la combinación iterativa de la identificación en lazo cerrado y el rediseño de controladores; en la Figura 2.1 se muestra el esquema que representa las bases de este procedimiento iterativo para el caso de un controlador digital RST.

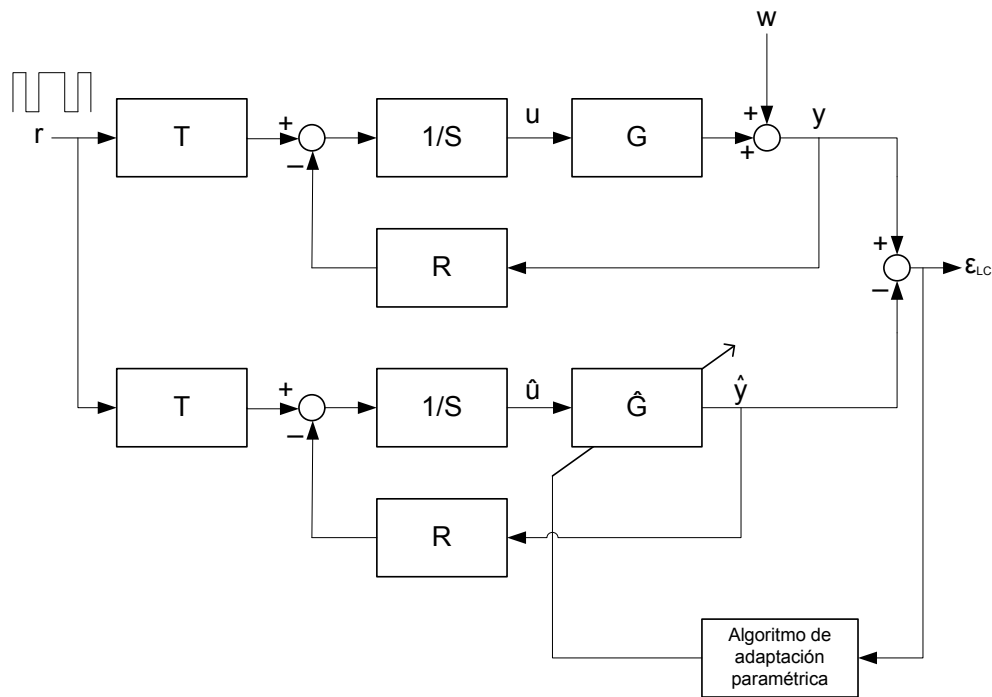


Figura 1.3: Esquema de identificación en lazo cerrado.

En la Figura 2.1 R , S y T son los polinomios de un controlador digital, G y \hat{G} representan a la planta real y la estimada; r , u , y y w son las señales de referencia, control, salida y ruido, respectivamente, mientras que \hat{u} y \hat{y} son las señales estimadas de control y salida.

Del esquema mostrado en la Figura 2.1 se pueden derivar dos familias de algoritmos recursivos para la identificación en lazo cerrado. La primera se basa en la reescritura de la ecuación de salida del sistema en lazo cerrado en términos de $\hat{u}(t)$ y $\hat{y}(t)$, y los valores previos del error de predicción (ε_{LC}). Esta aproximación es la que genera la familia de algoritmos de identificación recursiva CLOE, donde los parámetros del modelo estimado son calculados por un algoritmo de adaptación de parámetros utilizando el error de

predicción de salida en lazo cerrado como error de adaptación.

La segunda familia de algoritmos se basa en la reescritura de la ecuación de salida del sistema en lazo cerrado en términos del vector que contiene el conjunto de mediciones (de $u(t)$ y $y(t)$), y los valores previos del error de predicción (ε_{LC}). Éste tipo de aproximación permite la utilización de varios algoritmos de identificación recursiva en lazo abierto, aplicando un filtrado adecuado de los datos.

Los distintos algoritmos para identificación en lazo cerrado CLOE, presentados en [LK96] , [LK97] y [Lan02] son los listados a continuación:

CLOE *Closed Loop Output Error*

F-CLOE *Filtered Closed Loop Output Error*

AF-CLOE *Adaptive Filtered Closed Loop Output Error*

X-CLOE *Extended Closed Loop Output Error*

G-CLOE *Generalized Closed Loop Output Error*

El objetivo principal de la identificación en lazo cerrado utilizando el algoritmo CLOE es encontrar el modelo de la planta que minimice la discrepancia entre el sistema real operando en lazo cerrado y el sistema estimado (funcionando también en lazo cerrado).

La combinación de modelos complejos y el diseño de un controlador robusto da como resultado controladores de alto orden; en [LKC01] se plantea como es que la identificación de sistemas en lazo cerrado puede ser usada (con pequeños cambios) para la estimación directa de controladores de orden reducido.

1.9. Metodología

Durante al desarrollo del trabajo de investigación, presentado en este documento, quedó descartado el desarrollo de nuevas técnicas para la identificación en lazo cerrado, a partir de la amplia literatura disponible. En lugar de esto se tomaron como base los trabajos presentados para las estructuras de la familia CLOE; y para la adaptación paramétrica se utilizó el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados, ya que éste es reportado en la literatura como útil para cumplir con dicho propósito [LK95].

La asimilación de la identificación en lazo cerrado consistió en la comprensión de la teoría hasta poder llegar a su implementación práctica, programando los algoritmos en un software de cálculo, estos se probaron en algunos ejemplos de modelos encontrados en la literatura y en un ejercicio práctico (laboratorio); dichos algoritmos se incluyen dentro de funciones que conforman un toolbox, el cual se elaboró en MatLab[®] y SciLab[®]

(el cual es un software de distribución gratuita). Éste es producto es una contribución académica y se pondrá a disposición de la comunidad científica.

A continuación se listan los pasos seguidos para el desarrollo del trabajo de investigación.

- Estudio de la identificación en lazo cerrado.
- Análisis, estudio y asimilación de la identificación con estructura tipo CLOE.
- Estudio de la adaptación paramétrica empleando el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados.
- Análisis del reajuste de modelos a través de la identificación en lazo cerrado.
- Desarrollo de técnicas de validación de modelos estimados.
- Análisis de la reducción del orden de los controladores empleando la identificación con estructura tipo CLOE.
- Selección de los algoritmos a utilizar para la elaboración del toolbox de identificación.
- Programación del toolbox de identificación en MatLab[®] y SciLab[®]
- Obtención de datos para identificación, en simulación y en laboratorio.
- Evaluación de los algoritmos de identificación empleando resultados obtenidos por simulación y de forma experimental.

1.10. Consideraciones prácticas

Para el trabajo de investigación desarrollado se realizaron las siguientes consideraciones:

- El controlador es conocido de antemano.
- No siempre se cuenta con una estimación de la planta a priori.
- No se cuenta con un modelo de la dinámica del ruido.

1.11. Organización del documento

El presente documento se encuentra dividido en 6 capítulos y 4 apéndices, a continuación se describe brevemente el contenido expuesto en cada capítulo.

El **Capítulo 2** contiene la teoría correspondiente a la identificación de sistemas en lazo cerrado con estructura tipo CLOE y sus variantes, así como también se presenta un análisis de la distribución del bias. En el mismo capítulo se muestra la teoría relacionada con el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados, empleado como algoritmo de adaptación paramétrica, utilizado en el presente trabajo; así como un análisis de la robustez y convergencia del mismo.

En el **Capítulo 3** se muestran distintas técnicas de validación de modelos, obtenidos a través de un proceso de identificación en lazo cerrado; tales técnicas comprenden un análisis en el dominio del tiempo, en el dominio de la frecuencia y estadístico.

El **Capítulo 4** muestra el desarrollo de la formulación necesaria para aplicar la identificación de sistemas, en lazo cerrado, a la reducción del orden de los controladores. A su vez, se presenta una técnica sencilla para el cálculo de controladores robustos.

En el **Capítulo 5** se muestran los resultados obtenidos empleando los algoritmos de identificación desarrollados, dichos resultados fueron obtenidos a través de simulación y de un ejercicio práctico, armado en laboratorio. Tales resultados comprenden la obtención y reajuste de modelos, la validación de los mismos y la reducción directa del orden del controlador.

En el **Capítulo 6** se dan las conclusiones generales del trabajo y los trabajos futuros propuestos.

El **Apéndice A** contiene una breve descripción de las funciones contenidas dentro del toolbox de identificación en lazo cerrado.

En el **Apéndice B** se da la definición de una función discreta estrictamente real positiva (ERP).

El **Apéndice C** contiene la teoría básica referente a la generación de una señal binaria pseudo aleatoria (SBPA).

Finalmente, en el **Apéndice D** se muestra un análisis realizado a la distribución del error de predicción en lazo cerrado, obtenido de manera experimental.

Capítulo 2

Identificación de sistemas en lazo cerrado

La identificación de sistemas en lazo cerrado es una herramienta muy útil para la estimación de modelos de sistemas dinámicos, la necesidad del uso de ésta se puede deber a la incapacidad de poder aplicar un proceso de identificación en lazo abierto, ya sea por condiciones de operación o por inestabilidad en la planta o sistema [Riv04]. Sin embargo, la identificación de sistemas en lazo cerrado presenta otras ventajas, destacándose entre ellas la posibilidad de elaborar un reajuste de modelos para obtener un mejor desempeño en lazo cerrado [VdHS95], la reducción del bias [VdH98] y la posible reducción del orden del controlador [LKC01].

En el presente trabajo se utilizó la identificación de sistemas, en lazo cerrado con estructura tipo CLOE, para estimar los parámetros (coeficientes) de un modelo lineal en forma de función de transferencia, la cual representa la dinámica de una planta o sistema. Dicha función de transferencia se puede definir como:

$$G(q^{-1}) = \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad (2.1)$$

donde B y A corresponden al numerador y denominador de la función de transferencia, respectivamente, q^{-1} es el operador de retraso y d representa el retardo puro del sistema. De la ecuación (2.1) se tiene que:

$$B(q^{-1}) = q^{-1}B^*(q^{-1}) \quad (2.2)$$

$$A(q^{-1}) = 1 + q^{-1}A^*(q^{-1}) \quad (2.3)$$

donde:

$$B^*(q^{-1}) = b_1 + b_2q^{-1} + b_3q^{-2} + \dots + b_{n_B}q^{-n_B+1} \quad (2.4)$$

$$A^*(q^{-1}) = a_1 + a_2q^{-1} + a_3q^{-2} + \dots + a_{n_A}q^{-n_A+1} \quad (2.5)$$

Las ecuaciones (2.4) y (2.5) representan los polinomios que contienen a los coeficientes $[b_1 \dots b_{n_B} \ a_1 \dots a_{n_A}]$ de la función de transferencia que representa a un sistema.

Para realizar el análisis de la identificación en lazo cerrado, considérese un esquema como el presentado en la Figura 2.1, en el cual se muestra una planta (G) operando en lazo cerrado con un controlador RST. Se propone este tipo de controlador debido a su generalidad (varios controladores basados en modelo pueden ser representados por un esquema del tipo RST).

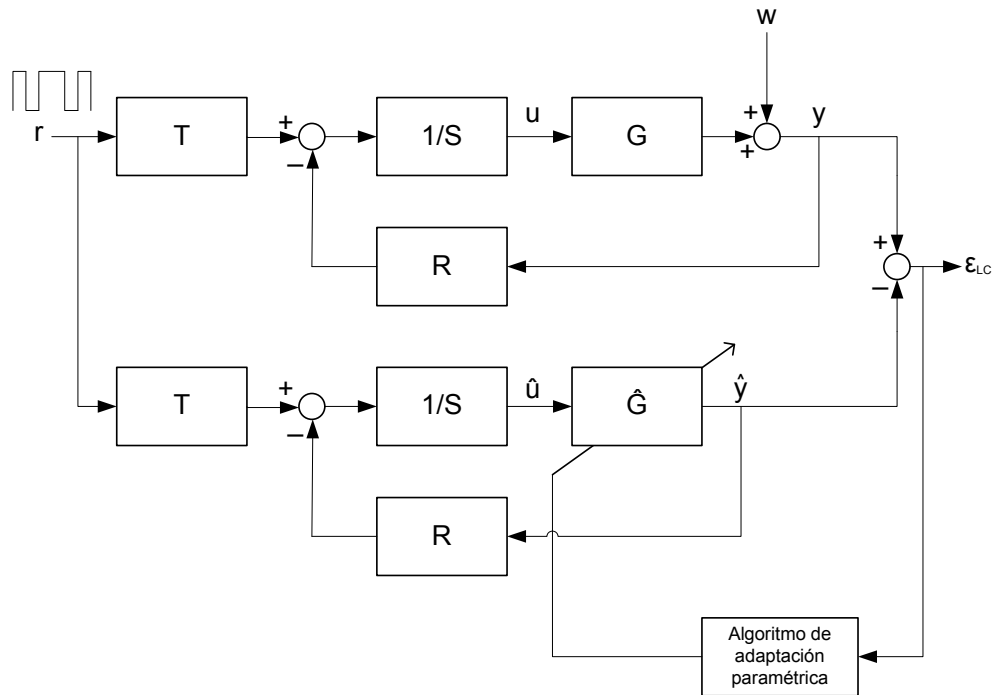


Figura 2.1: Esquema de identificación en lazo cerrado (RST).

En la Figura 2.1 r , u , y y w son las señales de referencia, control, salida y ruido, respectivamente, mientras que \hat{u} y \hat{y} representan a las señales de control y salida estimadas.

Con base en la Figura 2.1 se observa que la salida del sistema, operando en lazo cerrado, estará dada por (se omite el término de retraso q^{-1} para hacer más claras las

expresiones):

$$y(t+1) = -A^*y(t) + B^*u(t-d) + Aw(t+1) = \theta^T\varphi(t) + Aw(t+1) \quad (2.6)$$

donde $u(t)$ es la señal de control, $y(t)$ es la salida de la planta, $w(t)$ es el ruido a la salida provocado por perturbaciones, y:

$$\theta^T = [a_1 \quad \dots \quad a_{n_A} \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n_B}] \quad (2.7)$$

$$\varphi^T(t) = [-y(t) \quad \dots \quad -y(t-n_A+1) \quad u(t-d) \quad \dots \quad u(t-n_B+1-d)] \quad (2.8)$$

$$u(t) = -\frac{R}{S}y(t) + \frac{T}{S}r(t) \quad (2.9)$$

en la ecuación (2.9) R , S y T son los polinomios del controlador y $r(t)$ es la señal de referencia aplicada al sistema en lazo cerrado.

La salida estimada en lazo cerrado esta dada por la siguiente expresión (en las ecuaciones siguientes el símbolo $\hat{}$ significa “estimado”):

$$\hat{y}(t+1) = -\hat{A}^*\hat{y}(t) + \hat{B}^*\hat{u}(t-d) = \hat{\theta}^T\phi(t) \quad (2.10)$$

donde $\hat{y}(t)$ representa a la salida estimada del sistema en lazo cerrado y $\hat{u}(t)$ representa a la señal de control estimada, y:

$$\hat{\theta}^T = [\hat{a}_1 \quad \dots \quad \hat{a}_{n_A} \quad \hat{b}_1 \quad \dots \quad \hat{b}_{n_B}] \quad (2.11)$$

$$\phi^T(t) = [-\hat{y}(t) \quad \dots \quad -\hat{y}(t-n_A+1) \quad \hat{u}(t-d) \quad \dots \quad \hat{u}(t-n_B+1-d)] \quad (2.12)$$

$$\hat{u}(t) = -\frac{R}{S}\hat{y}(t) + \frac{T}{S}r(t) \quad (2.13)$$

Finalmente, el error de predicción a la salida en lazo cerrado ε_{LC} , se define como:

$$\varepsilon_{LC}(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1) \quad (2.14)$$

2.1. Adaptación de parámetros con mínimos cuadrados

La adaptación de los parámetros del modelo se puede llevar a cabo empleando varias técnicas; en el presente trabajo se utilizó el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados para este fin.

La selección de este algoritmo se debió a que en la literatura [LK95], [LK97], [Lan02], [Lan04] se han realizado pruebas exitosas usando éste.

2.1.1. Algoritmo recursivo de mínimos cuadrados

El algoritmo de adaptación paramétrica usado en este trabajo (algoritmo recursivo de mínimos cuadrados¹) está compuesto por las siguientes expresiones:

$$\hat{\Theta}(t+1) = \hat{\Theta}(t) + F(t) \Phi(t) \nu(t+1) \quad (2.15)$$

$$F(t+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)} \times \left[F(t) - \frac{F(t) \Phi(t) \Phi^T(t) F(t)}{\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} + \Phi^T(t) F(t) \Phi(t)} \right] \quad (2.16)$$

$$\nu(t+1) = \frac{\nu^\circ(t+1)}{1 + \Phi^T(t) F(t) \Phi(t)} \quad (2.17)$$

$$0 < \lambda_1(t) \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \lambda_2(t) < 2 \quad , \quad F(0) > 0$$

$$F^{-1}(t) > \alpha_k F^{-1}(0), \quad 0 < \alpha_k < \infty$$

donde $\hat{\Theta}(t)$ es el vector de coeficientes estimados, $\Phi(t)$ es un vector de regresión (observación), $\nu(t+1)$ representa al error de adaptación, $F(t)$ es la ganancia de adaptación y $\lambda_1(t)$ y $\lambda_2(t)$ son parámetros de ajuste para la ganancia de adaptación.

En las expresiones que componen al algoritmo de adaptación paramétrica, ecuaciones (2.15)-(2.17), se puede ver que las secuencias $\lambda_1(t)$ y $\lambda_2(t)$ permiten tener varios tipos de evolución en el tiempo de la ganancia de adaptación $F(t)$.

¹ El desarrollo completo de este algoritmo puede verse en [Lan02], Capítulo 5, Pp 260-280.

2.1.2. Evolución de la ganancia de adaptación

De acuerdo con las secuencias $\lambda_1(t)$ y $\lambda_2(t)$ seleccionadas por el usuario, se pueden tener siete distintas maneras de evolución de la ganancia de adaptación $F(t)$ [Lan04], las cuales se describen a continuación.

1. Ganancia decreciente

Para tener este tipo de ganancia se deben asignar los siguientes valores:

$$\lambda_1(t) = \lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2(t) = \lambda_2 = 1$$

Este tipo de evolución de la ganancia se recomienda para la identificación de sistemas estacionarios (con parámetros constantes).

2. Factor de olvido fijo

Se establecen los siguientes valores para $\lambda_1(t)$ y $\lambda_2(t)$

$$\lambda_1(t) = \lambda_1 \quad , \quad 0 < \lambda_1 < 1 \quad (2.18)$$

$$\lambda_2(t) = \lambda_2 = 1$$

Esta se recomienda para la identificación de sistemas lentamente variables.

3. Factor de olvido variable

Para éste se establecen las siguientes expresiones

$$\lambda_2(t) = \lambda_2 = 1$$

$$\lambda_1(t) = \lambda_0 \lambda_1(t-1) + 1 - \lambda_0 \quad (2.19)$$

$$0 < \lambda_0 < 1 \quad , \quad 0 < \lambda_1(0) \leq 1$$

Esta forma de calcular la evolución de la ganancia de adaptación es recomendable para la identificación de sistemas estacionarios.

4. Traza constante

Esta se obtiene al establecer las siguientes condiciones para la evolución de la ganancia de adaptación $F(t)$

$$\text{tr}F(t+1) = \text{tr}F(t) = \text{tr}F(0) = nGI \quad (2.20)$$

$$n = n_{num} + n_{den} \quad (2.21)$$

$$F(0) = \begin{bmatrix} GI & 0 \\ & \ddots \\ 0 & GI \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

valores típicos de GI : 0.1, ..., 4

Los valores de $\lambda_1(t)$ y $\lambda_2(t)$ se determinan a partir de la ecuación:

$$trF(t+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)} tr \left[F(t) - \frac{F(t) \Phi(t) \Phi^T(t) F(t)}{\alpha_0(t) + \Phi^T(t) F(t) \Phi(t)} \right] = trF(t) \quad (2.23)$$

$$\alpha_0(t) = \lambda_1(t)/\lambda_2(t) \quad (2.24)$$

La forma de evolución de la ganancia de adaptación descrita por las ecuaciones (2.20)-(2.24), se recomienda para la identificación de sistemas que poseen parámetros variables con el tiempo.

5. Ganancia decreciente + traza constante

Para esta se conmuta de “ganancia decreciente” a “traza constante” cuando se cumpla la siguiente condición:

$$trF(t) \leq nG \quad , \quad G = 0.1 \text{ a } 4 \quad (2.25)$$

donde G es fijada de antemano.

Esta forma de evolución de la ganancia de adaptación es conveniente para la identificación de sistemas variables en el tiempo, en ausencia de información inicial de sus parámetros.

6. Factor de olvido variable + traza constante

En este caso se conmuta de “factor de olvido variable” a “traza constante” cuando:

$$trF(t) \leq nG \quad (2.26)$$

Es conveniente usarla para la identificación de sistemas variables en el tiempo, en ausencia de información inicial de sus parámetros.

7. Ganancia constante

Para este tipo de evolución de la ganancia de adaptación se deben de establecer los siguientes valores:

$$\lambda_1(t) = \lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2(t) = \lambda_2 = 0$$

de tal manera que la ganancia de adaptación puede ser expresada de la siguiente forma:

$$F(t+1) = F(t) = F(0) \quad (2.27)$$

donde:

$$F(0) = \frac{1}{\delta} I = (GI) I \quad , \quad 0 < \delta \ll 1 \quad (2.28)$$

valor típico de $\delta = 0.001$ ($GI = 1000$).

Esta forma de calcular la ganancia de adaptación resulta útil para la identificación de sistemas estacionarios o variables en el tiempo, pero que poseen pocos parámetros (≤ 3), y con un nivel reducido de ruido.

El desempeño de este algoritmo es inferior en comparación con los primeros 6 descritos anteriormente, sin embargo es muy sencillo y resulta fácil su implementación.

2.1.3. Algoritmo de adaptación paramétrica para identificación con estructura CLOE

Anteriormente se expuso que el error de predicción a la salida, en lazo cerrado, se define como:

$$\varepsilon_{LC}(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1) \quad (2.29)$$

Para implementar el algoritmo de identificación en lazo cerrado con estructura tipo CLOE es necesario contar con la predicción de la señal de salida a priori (basada en $\hat{\theta}(t)$) y a posteriori (basada en $\hat{\theta}(t+1)$), que esta dada por:

a priori:

$$\hat{y}^\circ(t+1) = \hat{y}(t+1|\hat{\theta}(t)) = \hat{\theta}^T(t) \phi(t) \quad (2.30)$$

a posteriori:

$$\hat{y}(t+1) = \hat{y}(t+1|\hat{\theta}(t+1)) = \hat{\theta}^T(t+1)\phi(t) \quad (2.31)$$

lo mismo ocurre con el error de predicción en lazo cerrado, para el que se tiene:

a priori:

$$\varepsilon_{LC}^{\circ}(t+1) = y(t+1) - \hat{y}^{\circ}(t+1) \quad (2.32)$$

a posteriori:

$$\varepsilon_{LC}(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1) \quad (2.33)$$

Utilizando el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados, descrito por las ecuaciones (2.15)-(2.17), como algoritmo de adaptación paramétrica, se tiene:

$$\varepsilon_{LC}(t+1) = \frac{\varepsilon_{LC}^{\circ}(t+1)}{1 + \phi^T(t)F(t)\phi(t)} \quad (2.34)$$

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t)\phi(t)\varepsilon_{LC}(t+1) \quad (2.35)$$

$$F(t+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)} \times \left[F(t) - \frac{F(t)\phi(t)\phi^T(t)F(t)}{\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} + \phi^T(t)F(t)\phi(t)} \right] \quad (2.36)$$

Observando la ecuación (2.34) se puede apreciar que el error de predicción en lazo cerrado a posteriori ($\varepsilon_{LC}(t+1)$), puede ser expresado en términos del error a priori ($\varepsilon_{LC}^{\circ}(t+1)$); con lo que, a partir de la ecuación (2.35), se puede calcular la señal de salida del proceso a posteriori; y con ello construir el vector de observación $\phi(t)$. De tal forma que al final de todo el proceso se calcula el vector $\hat{\theta}(t)$, el cual contiene los coeficientes estimados de la función de transferencia \hat{G} . Dicha función de transferencia representará de buena manera la dinámica del sistema real (en lazo cerrado), sí y sólo sí el proceso de identificación se realizó correctamente.

2.2. Algoritmos de identificación con estructura tipo CLOE

2.2.1. Algoritmo CLOE

La clave principal del algoritmo de identificación CLOE consiste en poder expresar la salida de la planta en función del vector de observación estimado (ϕ). De tal manera se tiene que:

$$u(t) = \frac{T}{S}r(t) - \frac{R}{S}y(t) \quad (2.37)$$

sustituyendo la ecuación (2.37) en la ecuación (2.6):

$$y(t+1) = \frac{q^{-d}B^*T}{S}r(t) - \left(A^* + \frac{q^{-d}B^*R}{S}\right)y(t) + Aw(t+1) \quad (2.38)$$

a partir de la ecuación (2.29) se puede obtener lo siguiente:

$$y(t) = \varepsilon_{LC}(t) + \hat{y}(t) \quad (2.39)$$

sustituyendo la ecuación (2.39) en la ecuación (2.38) se tiene:

$$y(t+1) = \frac{q^{-d}B^*T}{S}r(t) - \left(A^* + \frac{q^{-d}B^*R}{S}\right)\hat{y}(t) - \left(A^* + \frac{q^{-d}B^*R}{S}\right)\varepsilon_{LC}(t) + Aw(t+1) \quad (2.40)$$

con base en la ecuación (2.37) se obtiene:

$$r(t) = \frac{S}{T}\hat{u}(t) + \frac{R}{T}\hat{y}(t) \quad (2.41)$$

ahora, sustituyendo la ecuación anterior (2.41) en la ecuación (2.40) se tiene:

$$y(t+1) = -A^*\hat{y}(t) + q^{-d}B^*\hat{u}(t) - \left(A^* + \frac{q^{-d}B^*R}{S}\right)\varepsilon_{LC}(t) + Aw(t+1) \quad (2.42)$$

donde:

$$-A^*\hat{y}(t) + q^{-d}B^*\hat{u}(t) = -A^*\hat{y}(t) + B^*\hat{u}(t-d) = \theta^T\phi(t) \quad (2.43)$$

por lo que, finalmente, la salida real de la planta o sistema puede expresarse en función del vector de observación estimado (ϕ), al sustituir la ecuación (2.43) en (2.42):

$$y(t+1) = \theta^T\phi(t) - \left(A^* + \frac{q^{-d}B^*R}{S}\right)\varepsilon_{LC}(t) + Aw(t+1) \quad (2.44)$$

Haciendo uso de la ecuación (2.44) se puede hallar otra manera de expresar el error de predicción a la salida, la cual se obtiene a partir de sustituir las ecuaciones (2.10) y (2.44) en la ecuación (2.29), de tal forma que:

$$\varepsilon_{LC}(t+1) = \theta^T\phi(t) - \left(A^* + \frac{q^{-d}B^*R}{S}\right)\varepsilon_{LC}(t) + Aw(t+1) - \hat{\theta}^T\phi(t) \quad (2.45)$$

agrupando y reordenando términos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{LC}(t+1) &= (\theta - \hat{\theta})^T\phi(t) - \left(A^* + \frac{q^{-d}B^*R}{S}\right)\varepsilon_{LC}(t) + Aw(t+1) \\ \varepsilon_{LC}(t+1) + \left(A^* + \frac{q^{-d}B^*R}{S}\right)\varepsilon_{LC}(t) &= (\theta - \hat{\theta})^T\phi(t) + Aw(t+1) \\ \varepsilon_{LC}(t+1) \left[1 + q^{-1}A^* + \frac{q^{-1}q^{-d}B^*R}{S}\right] &= (\theta - \hat{\theta})^T\phi(t) + Aw(t+1) \\ \varepsilon_{LC}(t+1) \left(\frac{AS + q^{-d}BR}{S}\right) &= (\theta - \hat{\theta})^T\phi(t) + Aw(t+1) \end{aligned}$$

haciendo $P = AS + q^{-d}BR$ (ecuación característica del sistema real en lazo cerrado), se obtiene la siguiente expresión para el error de predicción a la salida en lazo cerrado:

$$\varepsilon_{LC}(t+1) = \frac{S}{P}(\theta - \hat{\theta})^T\phi(t) + \frac{AS}{P}w(t+1) \quad (2.46)$$

La ecuación (2.46) representa el error para un ambiente estocástico (con $w(t) \neq 0$); para el caso determinístico ($w(t) \equiv 0$) la ecuación que define al error de predicción se reduce a:

$$\varepsilon_{LC}(t+1) = \frac{S}{P}(\theta - \hat{\theta})^T\phi(t) \quad (2.47)$$

ALGORITMO CLOE

El algoritmo CLOE utilizando el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados como AAP (algoritmo de adaptación paramétrica) se obtiene al sustituir la siguientes expresiones en las ecuaciones (2.15)-(2.17)

$$\hat{\Theta}(t) = \hat{\theta}(t)$$

$$\Phi(t) = \phi(t)$$

$$\nu^\circ(t+1) = \varepsilon_{LC}^\circ(t+1) = y(t+1) - \hat{\theta}^T(t)\phi(t)$$

2.2.2. Algoritmos F-CLOE y AF-CLOE

La formulación del algoritmo F-CLOE (CLOE Filtrado) consiste en reescribir la ecuación (2.47) de la siguiente manera:

$$\varepsilon_{LC}(t+1) = \frac{S}{P} \frac{\hat{P}}{S} (\theta - \hat{\theta})^T \frac{S}{\hat{P}} \phi(t) = \frac{\hat{P}}{P} (\theta - \hat{\theta})^T \phi_f(t) \quad (2.48)$$

donde \hat{P} representa la ecuación característica del sistema estimado en lazo cerrado, y:

$$\phi_f(t) = \frac{S}{\hat{P}} \phi(t) \quad (2.49)$$

$$\hat{P} = \hat{A}S + q^{-d}\hat{B}R \quad (2.50)$$

Si en la ecuación (2.48) se reemplaza el término \hat{P} por $\hat{P}(t)$ (estimación “actual” de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado), se obtiene la expresión para ε_{LC} correspondiente al algoritmo AF-CLOE (CLOE Adaptable-Filtrado)

$$\varepsilon_{LC}(t+1) = \frac{\hat{P}(t)}{P} (\theta - \hat{\theta})^T \phi_f(t) \quad (2.51)$$

Todas las demás expresiones o ecuaciones de los algoritmos F-CLOE y AF-CLOE son iguales a las del algoritmo CLOE.

Debido a que no siempre se cuenta con una primera estimación de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado, no es posible aplicar en todos los casos el algoritmo F-CLOE.

En lo referente al algoritmo AF-CLOE, aunque se puede proponer una $\hat{P}(0)$ distinta de cero al inicio del proceso de identificación, resulta algo redundante (a nivel de programación) implementarlo por separado; la función (contenida en el toolbox que se elaboró) para llevar a cabo la identificación CLOE puede ser modificada por el usuario, si éste desea realizar identificación AF-CLOE. En la práctica no se observó alguna diferencia significativa entre los modelos estimados con el algoritmo CLOE y el AF-CLOE.

ALGORITMOS F-CLOE y AF-CLOE

Los algoritmos F-CLOE y AF-CLOE, utilizando el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados como AAP, se obtienen al sustituir la siguientes expresiones en las ecuaciones (2.15)-(2.17)

$$\hat{\Theta}(t) = \hat{\theta}(t)$$

$$\Phi(t) = \phi_f(t)$$

$$\nu^\circ(t+1) = \varepsilon_{LC}^\circ(t+1)$$

2.2.3. Algoritmo X-CLOE

Para este algoritmo se considera que el ruido provocado por las perturbaciones se puede representar como: $w(t) = (C/A)e(t)$, donde $e(t)$ es un ruido blanco Gaussiano con media cero y C es un polinomio asintóticamente estable. De esta manera se tiene una salida estimada en lazo cerrado extendida:

$$\hat{y}(t+1) = -\hat{A}^* \hat{y}(t) + \hat{B}^* \hat{u}(t-d) + \hat{H}^* \frac{\varepsilon_{LC}(t)}{S} = \hat{\theta}^T \phi(t) + \hat{H}^* \frac{\varepsilon_{LC}(t)}{S} = \hat{\theta}_e^T \phi_e(t) \quad (2.52)$$

donde S corresponde al polinomio que contiene los polos del controlador, y:

$$\hat{H}^* = q(CS - \hat{P}) \quad (2.53)$$

$$C(q^{-1}) = 1 + C^*(q^{-1}) \quad (2.54)$$

$$C^*(q^{-1}) = c_1 + c_2 q^{-1} + c_3 q^{-2} + \dots + c_{n_C} q^{-n_C+1} \quad (2.55)$$

$$\hat{H}^*(q^{-1}) = \hat{h}_1 + \hat{h}_2q^{-1} + \hat{h}_3q^{-2} + \dots + \hat{h}_{n_H}q^{-n_H+1} = C^*S - \hat{A}^*S - q^{-d}\hat{B}^*R \quad (2.56)$$

Empleando la ecuación (2.52), la ecuación (2.44) (que representa la salida real del sistema en lazo cerrado) adquiere la siguiente forma:

$$y(t+1) = \theta^T \phi(t) + \hat{H}^* \frac{\varepsilon_{LC}(t)}{S} - C^* \varepsilon_{LC}(t) + Ce(t+1) \quad (2.57)$$

El error de predicción a la salida para el algoritmo X-CLOE (CLOE Extendido) se obtiene al sustituir las ecuaciones (2.52) y (2.57) en la ecuación (2.29), de tal manera se tiene como resultado la siguiente expresión:

$$\varepsilon_{LC}(t+1) = \frac{1}{C} \left(\theta_e - \hat{\theta}_e \right)^T \phi_e(t) + e(t+1) \quad (2.58)$$

donde:

$$\theta_e^T = [\theta^T \quad h_1 \quad \dots \quad h_{n_H}] \quad (2.59)$$

$$\hat{\theta}_e^T = [\hat{\theta}^T \quad \hat{h}_1 \quad \dots \quad \hat{h}_{n_H}] \quad (2.60)$$

$$\phi_e^T(t) = [\phi^T(t) \quad \varepsilon_{LC_f}(t) \quad \dots \quad \varepsilon_{LC_f}(t - n_H + 1)] \quad (2.61)$$

$$\varepsilon_{LC_f}(t) = \frac{1}{S} \varepsilon_{LC}(t) \quad (2.62)$$

Las ecuaciones anteriores son las que componen al algoritmo X-CLOE; como se mencionó en un principio, este algoritmo depende de que se establezca una dinámica al ruido mediante el polinomio C, el cual debe ser asintóticamente estable. Con esto se tendrá una versión extendida de la ecuación de salida, estimada en lazo cerrado.

Sin embargo, en sistemas reales no siempre se cuenta con la información necesaria para asignar el polinomio C, por tal razón no siempre es posible aplicar directamente este algoritmo.

ALGORITMO X-CLOE

El algoritmo X-CLOE, utilizando el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados como AAP, se obtiene al sustituir la siguientes expresiones en las ecuaciones (2.15)-(2.17)

$$\hat{\Theta}(t) = \hat{\theta}_e(t)$$

$$\Phi(t) = \phi_e(t)$$

$$\nu^\circ(t+1) = \varepsilon_{LC}^\circ(t+1) = y(t+1) - \hat{\theta}_e^T(t)\phi_e(t)$$

2.2.4. Algoritmo G-CLOE

Para este algoritmo se considera un modelo para el ruido causado por las perturbaciones de la forma:

$$w(t+1) = \frac{C}{DA}e(t+1) \quad (2.63)$$

donde los polinomios $C(q^{-1}) = 1 + C^*(q^{-1})$ y $D(q^{-1}) = 1 + D^*(q^{-1})$ son polinomios asintóticamente estables, $e(t+1)$ es un ruido blanco con media cero y:

$$C^*(q^{-1}) = c_1 + c_2q^{-1} + c_3q^{-2} + \dots + c_{n_C}q^{-n_C+1} \quad (2.64)$$

$$D^*(q^{-1}) = d_1 + d_2q^{-1} + d_3q^{-2} + \dots + d_{n_D}q^{-n_D+1} \quad (2.65)$$

La salida del sistema en lazo cerrado puede ser expresada como:

$$y(t+1) = -A^*y(t) + B^*u(t-d) + \frac{C}{D}e(t+1) \quad (2.66)$$

Siguiendo un procedimiento similar al aplicado para el algoritmo X-CLOE, se obtiene una ecuación para la salida del sistema en lazo cerrado de la forma:

$$\begin{aligned} y(t+1) = & \theta^T \phi(t) - D^* \alpha(t) + H^* \frac{\varepsilon_{LC}(t)}{S} + Ce(t+1) - C^* \varepsilon_{LC}(t) \\ & + q^{-1} D^* \left[- \left(A^* - \hat{A}^* \right) \hat{y}(t) + \left(B^* - \hat{B}^* \right) \hat{u}(t-d) \right] \end{aligned} \quad (2.67)$$

donde:

$$\alpha(t) = \hat{A} \hat{y}(t) - \hat{B} \hat{u}(t-d) \quad (2.68)$$

$$H^* = C^*S - A^*S - q^{-d}B^*R - D^*AS - D^*q^{-d}BR \quad (2.69)$$

$$H = 1 + q^{-1}H^* = 1 + CS - DP \quad (2.70)$$

La salida estimada en lazo cerrado adquiere la forma:

$$\hat{y}(t+1) = \hat{\theta}^T \phi(t) - \hat{D}^* \alpha(t) + \hat{H}^* \frac{\varepsilon_{LC}(t)}{S} \quad (2.71)$$

Así como en los algoritmos presentados anteriormente, la ecuación que describe al error de predicción a la salida, para el algoritmo G-CLOE (CLOE Generalizado), se obtiene al sustituir las ecuaciones (2.71) y (2.67) en la ecuación (2.29), con lo cual se obtiene lo siguiente:

$$\varepsilon_{LC}(t+1) = \frac{D}{C} (\theta - \hat{\theta})^T \phi(t) + \frac{1}{C} (H^* - \hat{H}^*) \frac{\varepsilon_{LC}(t)}{S} - \frac{1}{C} (D^* - \hat{D}^*) \alpha(t) + e(t+1) \quad (2.72)$$

Para el caso determinístico ($w(t) \equiv 0$) la expresión que describe al error de predicción a la salida (ecuación (2.72)) adquiere la siguiente forma:

$$\varepsilon_{LC}(t+1) = [\theta_{eO} - \hat{\theta}_e(t+1)]^T \phi_e(t) \quad (2.73)$$

donde:

$$\theta_{eO}^T = [\theta^T \quad h_1 \quad \dots \quad h_{n_H} \quad d_1 \quad \dots \quad d_{n_D}] \quad (2.74)$$

$$\phi_e^T(t) = [\phi^T(t) \quad \varepsilon_{LC_f}(t) \quad \dots \quad \varepsilon_{LC_f}(t - n_H + 1) \quad -\alpha(t) \quad \dots \quad -\alpha(t - n_D + 1)] \quad (2.75)$$

$$\hat{\theta}_e^T(t) = [\hat{\theta}^T(t) \quad \hat{h}_1(t) \quad \dots \quad \hat{h}_{n_H}(t) \quad \hat{d}_1(t) \quad \dots \quad \hat{d}_{n_D}(t)] \quad (2.76)$$

$$H^* = h_1 + h_2q^{-1} + h_3q^{-2} + \dots + h_{n_H}q^{-n_H+1} \quad (2.77)$$

$$\varepsilon_{LC_f}(t) = \frac{1}{S} \varepsilon_{LC}(t) \quad (2.78)$$

Al igual que con el algoritmo X-CLOE, se necesita contar con un modelo para las perturbaciones (ecuación (2.63)) para poder aplicar el algoritmo G-CLOE, y generalmente no es posible contar con éste.

ALGORITMO G-CLOE

El algoritmo G-CLOE utilizando el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados como AAP (algoritmo de adaptación paramétrica) se obtiene al sustituir la siguientes expresiones en las ecuaciones (2.15)-(2.17)

$$\hat{\Theta}(t) = \hat{\theta}_e(t)$$

$$\Phi(t) = \phi_e(t)$$

$$\nu^\circ(t+1) = \varepsilon_{LC}^\circ(t+1) = y(t+1) - \hat{\theta}_e^T(t)\phi_e(t)$$

En las siguientes secciones se presentan algunos resultados referentes a la convergencia y la robustez, cuando se emplea la identificación de sistemas con estructura tipo CLOE con el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados, descrito anteriormente.

2.3. Convergencia de parámetros

2.3.1. Convergencia en un ambiente determinístico

Para mostrar la convergencia de los parámetros estimados a los parámetros del sistema real operando en lazo cerrado, usando un proceso de identificación con estructura tipo CLOE y el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados (algoritmo de adaptación paramétrica), se hace uso del siguiente teorema (ver [LK97]):

Teorema 2.1. *Asumir que se utiliza el siguiente algoritmos de adaptación de parámetros:*

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t)\phi(t)\nu(t+1) \quad (2.79)$$

$$F(t+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)} \times \left[F(t) - \frac{F(t)\phi(t)\phi^T(t)F(t)}{\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} + \phi^T(t)F(t)\phi(t)} \right] \quad (2.80)$$

$$\nu(t+1) = \frac{\nu^\circ(t+1)}{1 + \phi^T(t) F(t) \phi(t)} \quad (2.81)$$

$$0 < \lambda_1(t) \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \lambda_2(t) < 2 \quad , \quad F(0) > 0$$

$$F^{-1}(t) > \alpha_k F^{-1}(0), \quad 0 < \alpha_k < \infty$$

Asumir también que la relación entre $\nu(t+1)$ y $\hat{\theta}(t+1)$ está dada por:

$$\nu(t+1) = E(q^{-1}) \phi^T(t) [\theta - \hat{\theta}] \quad (2.82)$$

donde $\phi(t)$ es un vector compuesto por una secuencia acotada o no, $E(q^{-1})$ es una función de transferencia discreta (un cociente de polinomios mónicos que puede estar multiplicado por una ganancia positiva) y θ es un vector constante. Entonces, sí:

$$E'(q^{-1}) = E(q^{-1}) - \frac{\lambda}{2} \quad (2.83)$$

es estrictamente real positiva² (ERP), donde:

$$\max_t [\lambda_2(t)] \leq \lambda < 2 \quad (2.84)$$

se tiene que para cualquier $\nu(0)$ y $\hat{\theta}(0)$ acotadas,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \nu(t+1) = 0 \quad (2.85)$$

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^{t_1} \nu^2(t+1) < C_1 (\nu(0) \theta(0)) \quad , \quad 0 < C_1 < \infty \quad (2.86)$$

$$\|\hat{\theta}(t)\| \leq C_2 \quad , \quad 0 < C_2 < \infty \quad (2.87)$$

□

Empleando el Teorema 2.1 y la expresión para el error de predicción en lazo cerrado para el algoritmo CLOE, ecuación (2.47); se puede mostrar que para un ambiente

² Leer el Apéndice B para ver definición de ERP.

determinístico ($w(t) \equiv 0$), la condición suficiente para que el error de predicción a la salida, $\varepsilon_{LC}(t)$, esté acotado y que $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_{LC}(t+1) = 0$ para cualquier condición inicial, es:

$$E'(q^{-1}) = \frac{S(q^{-1})}{P(q^{-1})} - \frac{\lambda_2}{2} \quad (2.88)$$

que la ecuación (2.88) sea estrictamente real positiva. En la ecuación (2.88) P representa al polinomio característico del sistema en lazo cerrado, S representa el polinomio que contiene los polos del controlador y λ_2 corresponde a un parámetro de ajuste del algoritmo recursivo de mínimos cuadrados.

Dado que $\varepsilon_{LC}(t)$ está acotado, se concluye que tanto $\hat{y}(t)$ como $\hat{u}(t)$ también lo están, bajo la hipótesis de que el polinomio S es estable, lo cual se cumple al ser éste el polinomio que contiene los polos del controlador.

2.3.2. Convergencia en un ambiente estocástico

Para mostrar la convergencia de los parámetros estimados, a los parámetros del sistema real operando en lazo cerrado, en un ambiente estocástico ($w \neq 0$), se hace uso del siguiente teorema [LK97]:

Teorema 2.2. *Considérese el algoritmo de adaptación paramétrica*

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t) \phi(t) \nu(t+1) \quad (2.89)$$

$$F(t+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)} \times \left[F(t) - \frac{F(t) \phi(t) \phi^T(t) F(t)}{\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} + \phi^T(t) F(t) \phi(t)} \right] \quad (2.90)$$

$$\nu(t+1) = \frac{\nu^\circ(t+1)}{1 + \phi^T(t) F(t) \phi(t)} \quad (2.91)$$

$$0 < \lambda_1(t) \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \lambda_2(t) < 2 \quad , \quad F(0) > 0$$

$$F^{-1}(t) > \alpha_k F^{-1}(0), \quad 0 < \alpha_k < \infty.$$

y haciendo las siguientes consideraciones:

- Asumir que los procesos estacionarios $\phi(t, \hat{\theta})$ y $\nu(t+1, \hat{\theta})$ pueden ser definidos para $\hat{\theta}(t) \equiv \hat{\theta}$.
- Asumir que el $\hat{\theta}(t)$, generado por el algoritmo, pertenece infinitamente al dominio (D_s) para el cual los procesos estacionarios $\phi(t, \hat{\theta})$ y $\nu(t+1, \hat{\theta})$ pueden ser definidos.
- Asumir que $\nu(t+1, \hat{\theta})$ está dado por una ecuación de la forma:

$$\nu(t+1, \hat{\theta}) = H(q^{-1}) \phi^T(t, \hat{\theta}) [\theta - \hat{\theta}] + w(t+1, \hat{\theta}) \quad (2.92)$$

donde $H(q^{-1})$ es una función de transferencia discreta (un cociente de polinomios mónicos).

- Asumir que $w(t+1, \hat{\theta})$ es una secuencia de variables aleatorias, normales, independientes e igualmente distribuidas $(0, \sigma)$, o $E_D \left\{ \phi(t, \hat{\theta}), w(t+1, \hat{\theta}) \right\} = 0$.
- Definir el dominio de convergencia como:

$$D_c = \left\{ \hat{\theta} : \phi^T(t, \hat{\theta}) [\theta - \hat{\theta}] = 0 \right\}. \quad (2.93)$$

Luego entonces, si

$$E'(q^{-1}) = E(q^{-1}) - \frac{\lambda}{2} \quad (2.94)$$

es una función de transferencia discreta estrictamente real positiva, se tiene entonces que:

$$\text{Prob} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}(t) \in D_c \right\} = 1 \quad (2.95)$$

Corolario

Si

$$\phi^T(t, \hat{\theta}) [\theta - \hat{\theta}] = 0 \quad (2.96)$$

tiene una única solución $\hat{\theta} = \theta$, el que $E'(q^{-1})$ se estrictamente real positiva implica que:

$$\text{Prob} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}(t) = \theta \right\} = 1 \quad (2.97)$$

□

Haciendo uso del Teorema 2.2 y la ecuación (2.46) se puede demostrar que, para un ambiente estocástico, es posible lograr una estimación asintótica de parámetros sin bias; bajo la suposición de que $w(t)$ es independiente de la señal de excitación externa $r(t)$. La única condición que se requiere es entonces que la ecuación (2.88) sea estrictamente real positiva.

2.4. Robustez del algoritmo recursivo de mínimos cuadrados

Se garantiza la estabilidad del resultado obtenido con el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados (algoritmo de adaptación paramétrica), bajo la suposición de que el orden del sistema estimado es igual al orden de la planta (sistema real). Sin embargo, no siempre es posible cumplir con esta condición; por tal motivo resulta importante determinar la robustez del algoritmo con respecto a la parte no modelada de la dinámica de la planta.

En el presente trabajo se asumió que la porción no modelada del sistema real y la señal de excitación externa están acotadas; una vez que se establecieron estas condiciones y empleando el siguiente teorema:

Teorema 2.3. *Considerar el uso del siguiente AAP (Algoritmo de Adaptación Paramétrica).*

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t) \phi(t) \nu(t+1) \quad (2.98)$$

$$F(t+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)} \times \left[F(t) - \frac{F(t) \phi(t) \phi^T(t) F(t)}{\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} + \phi^T(t) F(t) \phi(t)} \right] \quad (2.99)$$

$$\nu(t+1) = \frac{\nu^\circ(t+1)}{1 + \phi^T(t) F(t) \phi(t)} \quad (2.100)$$

y asumir que la planta puede ser descrita por:

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t-d) + \eta(t) \quad (2.101)$$

donde $\eta(t)$ representa los efectos de la parte no modelada de la dinámica de la planta y el ruido ocasionado por disturbios. Bajo las consideraciones:

- el orden de los polinomios $B(q^{-1})$ y $A(q^{-1})$ está acotado por n_B y n_A , respectivamente, y se conoce el valor del retardo d .

- se conocen los parámetros del controlador RST que estabiliza el sistema, y
- la señal de excitación externa $r(t)$ y $\eta(t)$ están acotadas

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^N r^2(t) \leq \varepsilon^2 \quad , \quad \varepsilon^2 < \infty \quad (2.102)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^N \eta^2(t) \leq \kappa^2 \quad , \quad \kappa^2 < \infty \quad (2.103)$$

el error de predicción $\nu(t+1)$, la salida estimada $\hat{y}(t+1)$ y el vector de regresión estimado $\phi(t)$ estarán acotados si

$$E'(q^{-1}) = E(q^{-1}) - \frac{\lambda}{2} \quad , \quad \sup_t \lambda_2(t) \leq \lambda \leq 2, \quad (2.104)$$

es estrictamente real positiva.

□

es posible establecer que el error de predicción a posteriori, en lazo cerrado, $\varepsilon_{LC}(t+1)$, la salida estimada $\hat{y}(t+1)$ y el vector de regresión estimado $\phi(t)$ están acotados si la ecuación (2.104) es estrictamente real positiva; donde $E(q^{-1})$ es igual a S/P , \hat{P}/P , $\hat{P}(t)/P$ y 1 para los algoritmos CLOE, F-CLOE, AF-CLOE y X-CLOE respectivamente.

2.5. Distribución del bias

Una manera de analizar el error en la estimación de parámetros (en un ambiente estocástico) es mediante el análisis de la distribución del bias a lo largo del espectro de frecuencias. Por tal motivo resulta de mucha utilidad contar con una expresión para dicho bias.

Definición. La salida medida de un proceso es, generalmente, ruidosa; esto se debe a perturbaciones aleatorias, y éstas introducen errores en la estimación de parámetros. A esta clase de errores se le conoce como *bias* [Lan02].

Antes de realizar el análisis de la distribución del bias en la estimación de parámetros (empleando identificación con estructura tipo CLOE), se debe definir primero la densidad espectral de una señal.

2.5.1. Espectro de una señal

El teorema de Fourier afirma que toda señal periódica compleja puede descomponerse en una suma de señales sinusoidales de frecuencias y amplitudes diferentes. Esta descomposición se denomina espectro de frecuencias, y se representa mediante un gráfico con frecuencias en las abscisas y amplitudes en las ordenadas, en el que se visualizan las respectivas amplitudes de todas las frecuencias que componen a una señal $s(t)$.

El espectro de una señal $s(t)$ se define como:

$$\Upsilon(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_s(\tau) e^{-i\tau\omega} \quad (2.105)$$

donde $R_s(\tau)$ es la función de autocorrelación de la señal $s(t)$, la cual a su vez se define como:

$$R_s(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\tau=1}^N s(t) s(t - \tau) \quad (2.106)$$

La función de autocorrelación de una señal aleatoria $s(t)$ se define como el valor medio del producto $s(t)s(t - \tau)$, y suponiendo que el proceso sea estacionario, el valor de la media será independiente del tiempo absoluto t , y solo dependerá del parámetro temporal τ [Bar92].

2.5.2. Análisis de la distribución del bias

Se tiene que un sistema discreto SISO puede ser representado de la siguiente manera:

$$y(t) = G(q^{-1}) u(t) + p(t) \quad (2.107)$$

$$p(t) = W(q^{-1}) e(t) \quad (2.108)$$

donde $y(t)$ es la salida del sistema, $u(t)$ es la señal de entrada, $e(t)$ representa un ruido blanco con media cero y $G(q^{-1})$ y $W(q^{-1})$ son las funciones de transferencia de la planta y del ruido, respectivamente.

El algoritmo CLOE utiliza el siguiente predictor para estimar la salida del sistema en lazo cerrado:

$$\hat{y}(t) = G(\hat{\theta}) \hat{u}(t) \quad (2.109)$$

Si no se tiene un modelo específico para el ruido entonces en la ecuación (2.107) se hace $p(t) = w(t)$, sólo se considera que este ruido es independiente de la señal de excitación externa y tiene un espectro $\Upsilon_w(\omega)$. Sustituyendo las ecuaciones (2.107) y (2.109) (tomando en cuenta las consideraciones antes mencionadas) en la ecuación (2.29), se tiene entonces:

$$\varepsilon_{LC}(t) = G(q^{-1})u(t) + w(t) - G(\hat{\theta})\hat{u}(t) \quad (2.110)$$

y sustituyendo la ecuación (2.37) en la ecuación (2.110) se obtiene como resultado la siguiente expresión (por motivos de claridad se omite el término q^{-1}):

$$\varepsilon_{LC}(t) = G \left[\frac{T}{S}r(t) - \frac{R}{S}y(t) \right] + w(t) - G(\hat{\theta})\hat{u}(t) \quad (2.111)$$

A partir de la ecuación (2.29) se deriva la siguiente expresión para la salida del sistema en lazo cerrado

$$y(t) = \varepsilon_{LC}(t) + \hat{y}(t) \quad (2.112)$$

ahora se sustituye la ecuación (2.112) en la ecuación (2.111)

$$\varepsilon_{LC}(t) = G \left[\frac{T}{S}r(t) - \frac{R}{S}[\varepsilon_{LC}(t) + \hat{y}(t)] \right] + w(t) - G(\hat{\theta})\hat{u}(t) \quad (2.113)$$

se tiene que la señal de control estimada, $\hat{u}(t)$, en lazo cerrado es:

$$\hat{u}(t) = \frac{T}{S}r(t) - \frac{R}{S}\hat{y}(t) \quad (2.114)$$

a partir de la ecuación (2.114) se obtiene la siguiente ecuación para la salida estimada en lazo cerrado:

$$\hat{y}(t) = \frac{T}{R}r(t) - \frac{S}{R}\hat{u}(t) \quad (2.115)$$

sustituyendo la ecuación (2.115) en la ecuación (2.113) se obtiene lo siguiente:

$$\varepsilon_{LC}(t) = G \left[\frac{T}{S} r(t) - \frac{R}{S} \left[\varepsilon_{LC}(t) + \frac{T}{R} r(t) - \frac{S}{R} \hat{u}(t) \right] \right] + w(t) - G(\hat{\theta}) \hat{u}(t) \quad (2.116)$$

ordenando y agrupando términos, en la expresión anterior, se obtiene como resultado:

$$\varepsilon_{LC}(t) \left[1 + \frac{GR}{S} \right] = \left[G - G(\hat{\theta}) \right] \hat{u}(t) + w(t) \quad (2.117)$$

se tiene que $G = q^{-d}B/A$, sustituyendo esta expresión en el lado izquierdo de la ecuación (2.117) da como resultado:

$$\varepsilon_{LC}(t) \left[1 + \frac{q^{-d}BR}{AS} \right] = \left[G - G(\hat{\theta}) \right] \hat{u}(t) + w(t) \quad (2.118)$$

$$\varepsilon_{LC}(t) \left[\frac{AS + q^{-d}BR}{AS} \right] = \left[G - G(\hat{\theta}) \right] \hat{u}(t) + w(t) \quad (2.119)$$

haciendo $P = AS + q^{-d}BR$ (ecuación característica del sistema real en lazo cerrado) y reordenando términos en la ecuación (2.119), se obtiene la siguiente expresión para el error de predicción a la salida:

$$\varepsilon_{LC}(t) = \frac{AS}{P} \left\{ \left[G - G(\hat{\theta}) \right] \hat{u}(t) + w(t) \right\} \quad (2.120)$$

La función de sensibilidad del sistema en lazo cerrado es $S_{yp} = AS/P$, con lo que la ecuación (2.120) se vuelve:

$$\varepsilon_{LC}(t) = S_{yp} \left\{ \left[G - G(\hat{\theta}) \right] \hat{u}(t) + w(t) \right\} \quad (2.121)$$

La señal de control estimada, $\hat{u}(t)$, puede ser descrita con base en la señal de excitación externa, $r(t)$, de la siguiente manera:

$$\hat{u}(t) = \frac{\hat{A}T}{\hat{P}} r(t) \quad (2.122)$$

si se establece que $r_u(t) = T/S \cdot r(t)$, donde $r_u(t)$ es la señal de referencia filtrada; a partir de esto se deriva la siguiente expresión:

$$r(t) = \frac{S}{T} r_u(t) \quad (2.123)$$

sustituyendo la ecuación (2.123) en la ecuación (2.122) se obtiene lo siguiente:

$$\hat{u}(t) = \left(\frac{\hat{A}S}{\hat{P}} \right) r_u(t) = \hat{S}_{yp} r_u(t) \quad (2.124)$$

finalmente, sustituyendo la ecuación (2.124) en la ecuación (2.121) se obtiene como resultado una expresión en forma de función de transferencia para representar el bias.

$$\varepsilon_{LC}(t) = S_{yp} \left\{ \left[G - G(\hat{\theta}) \right] \hat{S}_{yp} r_u(t) + w(t) \right\} \quad (2.125)$$

Para poder realizar un análisis de la distribución del error (bias), a lo largo del espectro de frecuencias, resulta conveniente encontrar una expresión que describa la densidad espectral de dicho error. Para hacer esto se utiliza el siguiente teorema [Lju99]:

Teorema 2.4. *Sea $w_s(t)$ una señal quasi-estacionaria con espectro $\Upsilon_{w_s}(\omega)$, y $X(q^{-1})$ una función de transferencia estable, de tal forma que:*

$$s_x(t) = X(q^{-1}) w_s(t) \quad (2.126)$$

Entonces $s_x(t)$ es también una señal quasi-estacionaria y

$$\Upsilon_{s_x}(\omega) = |X(e^{j\omega})|^2 \Upsilon_{w_s}(\omega) \quad (2.127)$$

□

A partir del Teorema 2.4 y la ecuación (2.125) se deriva la ecuación (2.128), que es la expresión que describe a la densidad espectral del error (error procedente de un proceso de identificación con estructura tipo CLOE).

$$\Upsilon_{\varepsilon_{LC}}(\omega) = |S_{yp}|^2 \left\{ \left| G - G(\hat{\theta}) \right|^2 \left| \hat{S}_{yp} \right|^2 \Upsilon_{r_u}(\omega) + \Upsilon_w(\omega) \right\} \quad (2.128)$$

con base en la expresión anterior, la distribución del bias será la siguiente:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Upsilon_{\varepsilon_{LC}}(\omega) d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} |S_{yp}|^2 \left\{ \left| G - G(\hat{\theta}) \right|^2 \left| \hat{S}_{yp} \right|^2 \Upsilon_{r_u}(\omega) + \Upsilon_w(\omega) \right\} d\omega \quad (2.129)$$

La ecuación (2.129) muestra que: la estimación de los parámetros de la planta (sistema) no presentará bias si $G(\hat{\theta})$ se encuentra dentro del conjunto de modelos que representan a la planta real y que la distribución del bias prácticamente no se ve afectada por el espectro del ruido, $\Upsilon_w(\omega)$ (lo cual ocurre cuando se utilizan técnicas de identificación en lazo abierto para identificar sistemas trabajando en lazo cerrado [Lju93], [LF98]).

Los algoritmos F-CLOE y AF-CLOE tienen exactamente la misma distribución de bias. La expresión que describe la distribución del bias de los algoritmos X-CLOE y G-CLOE es similar a la obtenida al utilizar técnicas de identificación en lazo abierto (ver [Lju93]), por lo que estos algoritmos sí pueden presentar bias; esta es otra razón por la que se seleccionó el algoritmo CLOE.

2.6. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se abordó la identificación de sistemas en lazo cerrado con estructura tipo CLOE, para hacer el estudio de este tipo de identificación se propuso un controlador tipo RST; esto debido a que un gran número de controladores basados en modelo pueden ser representados de esta manera.

Se trató la teoría y ecuaciones referentes a cada variación conocida del algoritmo CLOE, dichas variaciones corresponden básicamente a la forma de construir el vector de parámetros estimados $\hat{\theta}(t)$ y el vector de observación estimado $\phi(t)$ (o vector de regresión).

Para la adaptación paramétrica se utilizó el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados, el cual resultó ser suficientemente eficiente para el cálculo de los parámetros estimados de la función de transferencia del sistema. Dicho algoritmo tiende asintóticamente a los parámetros reales cuando se hace una buena selección del orden del sistema, además

de comprobarse su estabilidad y robustez ante parte de la dinámica no modelada de la planta o sistema real.

Como resultado del estudio de los diversos algoritmos con estructura tipo CLOE, y tomando en cuenta las consideraciones prácticas hechas al principio (escritas en el Capítulo 1), se determinó que el algoritmo que resulta mejor es el CLOE. Los algoritmos X-CLOE y G-CLOE presentan bias en sus resultados, además de requerir el establecimiento de una dinámica al ruido; mientras que los algoritmos F-CLOE y AF-CLOE requieren de una primera estimación a priori de la planta a identificar.

Capítulo 3

Validación de modelos estimados

Una vez que se tiene un modelo estimado como resultado de un proceso de identificación en lazo cerrado, empleando el algoritmo CLOE, el siguiente paso lógico a seguir es el de validar dicho modelo. Los objetivos principales de la validación serán determinar si el modelo estimado representa adecuadamente al sistema real (al menos en la región de operación deseada) y servir como herramienta para seleccionar (en el caso de que se cuente con más de un modelo estimado) que modelo obtenido es el mejor.

En el presente trabajo se desarrollaron varios procedimientos de validación: validación en el dominio del tiempo (respuestas temporales), validación en el dominio de la frecuencia (diagramas de Bode), validación por cercanía de polos en lazo cerrado (distancia normalizada de Vinnicombe) y validación estadística (correlación cruzada).

Es importante mencionar que la validación del modelo dependerá del controlador, independientemente del criterio utilizado para tal propósito.

3.1. Validación en el dominio del tiempo

La validación en el dominio del tiempo consiste en la comparación de las respuestas al escalón y al impulso entre el sistema estimado y el sistema real (operando ambos en lazo cerrado), por razones de sencillez generalmente son utilizados un escalón y un impulso unitarios.

La forma de llevar a cabo esta validación es aplicando un escalón y un impulso al sistema real en lazo cerrado, las respuestas ante estas dos señales se registran y comparan visualmente contra aquellas obtenidas al aplicar las mismas señales al sistema estimado.

En teoría, la respuesta en lazo cerrado del sistema estimado, usando el algoritmo CLOE para la identificación, es más parecida a la respuesta del sistema real (operando también en lazo cerrado) que aquella obtenida de un sistema estimado usando técnicas de identificación en lazo abierto. Esto se comprobó en la práctica con un filtro de segundo orden implementado en laboratorio.

El comparar visualmente las respuestas no siempre resulta del todo útil cuando se tienen varios modelos estimados con características similares; por tal razón se implementó (en programación) la opción de poder calcular los índices de desempeño empleados en control (ver [SC91], [Oga98], [Alf03], [Val06]) para poder seleccionar el mejor modelo de un conjunto. Para el cálculo de los índices de desempeño se utiliza el vector que contiene la diferencia (error) entre la respuesta del sistema real y el estimado.

Los valores arrojados por los índices de desempeño permiten realizar una mejor selección, a continuación se describen los índices de desempeño empleados para ponderar la similitud entre respuestas en lazo cerrado al escalón y al impulso, del o los sistemas estimados y el real.

3.1.1. Índices de desempeño

Los índices de desempeño son funciones definidas por el usuario que indican la “bondad” del comportamiento de un sistema de cualquier orden; a su vez también son de utilidad para comparar la similitud entre la respuesta de un sistema (real) y otros (estimados).

En el presente trabajo se utilizó el error entre una diferencia temporal y otra (diferencia entre la respuesta del sistema real y el estimado) para el cálculo de los índices de desempeño. Entre menor sea el número arrojado por los índices de desempeño mayor será la similitud entre el sistema real y el estimado.

En las expresiones que sirven para determinar los índices de desempeño se tiene que N es la cantidad de muestras con las que se cuenta (tiempo discreto) y $e(t)$ (continuo) o $e(n)$ (discreto) representa la diferencia (error) entre una respuesta temporal y otra. Los índices de desempeño utilizados se listan a continuación.

- **IAE** (Integral del error absoluto).

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad \rightarrow \quad IAE = \sum_{n_K=1}^N |e(n_K)| \quad (3.1)$$

Pondera de igual manera errores grandes y pequeños, ya que simplemente es la suma del error absoluto (en tiempo discreto).

- **ITAE** (Integral del tiempo por el error absoluto).

$$ITAE = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt \quad \rightarrow \quad ITAE = \sum_{n_K=1}^N n_K |e(n_K)| \quad (3.2)$$

Crece con el error conforme aumenta el tiempo (duración de las respuestas temporales).

- **ISE** (Integral del error cuadrático).

$$ISE = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad \rightarrow \quad ISE = \sum_{n_K=1}^N e^2(n_K) \quad (3.3)$$

Se tiene más ponderación para errores grandes, los cuales se presentan generalmente al inicio de la respuesta, y menor ponderación para errores pequeños, los cuales ocurren hacia el final de la respuesta.

- **ITSE** (Integral del tiempo por el error cuadrático).

$$ITSE = \int_0^{\infty} te^2(t) dt \quad \rightarrow \quad ITSE = \sum_{n_K=1}^N n_K e^2(n_K) \quad (3.4)$$

Crece poco conforme aumenta el tiempo, debido a la naturaleza de su expresión; siempre y cuando el error sea pequeño conforme $n \rightarrow N$.

- **ISTSE** (Integral del tiempo cuadrático por el error cuadrático).

$$ISTSE = \int_0^{\infty} t^2 e^2(t) dt \quad \rightarrow \quad ISTSE = \sum_{n_K=1}^N n_K^2 e^2(n_K) \quad (3.5)$$

Posee mayor sensibilidad ante variaciones de parámetros. Arroja valores grandes por la manera en que es calculado.

- **MSE** (Media del error cuadrático).

$$MSE = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^2(t) dt \quad \rightarrow \quad MSE = \lim_{n_K \rightarrow N} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{n_K} e^2(k) \quad (3.6)$$

Penaliza más errores grandes que pequeños, debido a la naturaleza de su expresión.

- **MCE** (Error medio cuadrático).

$$MCE = \sqrt{\frac{\sum_{n_K=1}^N e^2(n_K)}{N}} \quad (3.7)$$

Proporciona el error promedio a lo largo del experimento (duración de las respuestas temporales).

3.2. Validación en el dominio de la frecuencia

Este tipo de validación consiste en obtener las gráficas de Bode (magnitud y fase) del sistema real en lazo cerrado y del sistema estimado en lazo cerrado. Una vez que se cuenta con dichas gráficas se comparan para observar la similitud existente entre ambas.

Para obtener el modelo del sistema real en lazo cerrado se utiliza identificación en lazo abierto, considerándose al controlador y a la planta como un sólo ente, tal como se muestra en la Figura 3.1; el modelo obtenido se valida utilizando las técnicas descritas en [Lju99] para este fin.

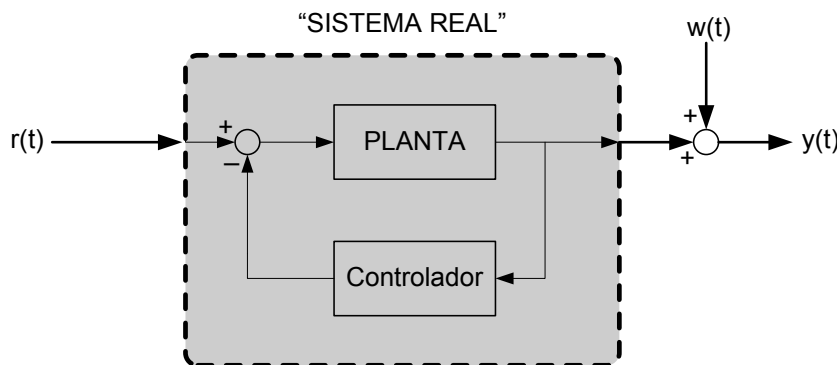


Figura 3.1: Configuración en lazo abierto.

Nótese que los datos utilizados para llevar a cabo la identificación del sistema completo (planta y controlador) pueden ser utilizados para identificar la planta utilizando el algoritmo CLOE.

Cabe mencionar que el tipo de identificación en lazo abierto, tomando en cuenta al sistema tal como se muestra en la Figura 3.1, es conveniente realizarla cuando la identificación directa de la planta en lazo abierto no puede ser llevada a cabo, debido a inestabilidad de la misma o debido a que no es posible remover el controlador.

Sin embargo es conveniente realizar la identificación en lazo abierto de la planta, cuando ésta sea posible, tal como se muestra en la Figura 3.2.

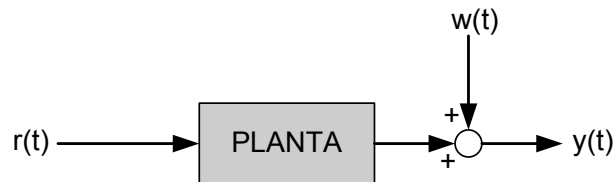


Figura 3.2: Identificación en lazo abierto.

Con el modelo obtenido con la identificación en lazo abierto se puede calcular el sistema en lazo cerrado, ya que el controlador se supone conocido; y el resultado se utiliza para compararlo con aquel obtenido mediante la identificación en lazo cerrado con estructura tipo CLOE. De tal manera se validan mutuamente los modelos estimados.

3.3. Validación mediante la cercanía de polos en lazo cerrado

Este tipo de validación consiste en graficar y observar la cercanía de los polos del sistema real en lazo cerrado y del sistema estimado.

Primero se debe obtener la función de transferencia que represente el sistema real en lazo cerrado, ésta se puede obtener empleando identificación en lazo abierto (considerando a la planta y al controlador como uno sólo, Figura 3.1, o calculando el sistema en lazo cerrado a partir de una identificación empleando el esquema de la Figura 3.2); después se deriva el sistema estimado en lazo cerrado a partir de la planta estimada, utilizando identificación en lazo cerrado tipo CLOE, y el controlador RST (que es conocido).

Una vez que se cuenta con ambas funciones de transferencia se obtienen los polos

(raíces de la ecuación característica), estos polos se grafican en el plano z (tiempo discreto) y se observa su cercanía.

Cuando se cuenta con varios modelos estimados de la planta en cuestión, resulta difícil determinar que polos estimados son los que se encuentran más cerca que aquellos pertenecientes al sistema real en lazo cerrado. Una técnica que permite cuantificar la distancia entre dos funciones de transferencia es la “distancia normalizada de Vinnicombe” [Vin93].

Dicha distancia normalizada se programó para poder establecer numéricamente la cercanía (o separación) entre la función de transferencia en lazo cerrado del sistema real y el(los) estimado(s). La descripción del algoritmo que determina la distancia normalizada de Vinnicombe se muestra a continuación.

3.3.1. Distancia normalizada de Vinnicombe

La distancia normalizada de Vinnicombe es una medida desarrollada para poder determinar numéricamente, de una manera sencilla, la distancia entre dos sistemas; el desarrollo de esta medida se encuentra descrito en [Vin93].

La distancia normalizada de Vinnicombe, δ_v , es una medida que tiene la característica de poder ser calculada directamente a partir de la respuesta en frecuencia, una vez que se resuelve una condición de involucramiento. Lo cual resulta importante, ya que quiere decir que la distancia entre dos plantas o sistemas puede ser estimada directamente a partir de sus respuestas en frecuencia.

La distancia normalizada de Vinnicombe adquiere valores entre 0 y 1, siendo 0 la distancia mínima (funciones de transferencia iguales) y 1 la lejanía máxima (funciones de transferencia nada relacionadas).

La diferencia normalizada entre dos funciones de transferencia $G_1(j\omega)$ y $G_2(j\omega)$ se determina de la siguiente manera:

$$\Lambda [G_1(j\omega), G_2(j\omega)] = \frac{G_1(j\omega) - G_2(j\omega)}{(1 + |G_1(j\omega)|^2)^{\frac{1}{2}} (1 + |G_2(j\omega)|^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.8)$$

y la distancia normalizada (de Vinnicombe) es:

$$\delta_v(G_1, G_2) = \max_{\omega} |\Lambda [G_1(j\omega), G_2(j\omega)]| \quad , \quad 0 \leq \omega \leq \pi \quad (3.9)$$

Para poder aplicar directamente la ecuación (3.9) a dos cualesquiera funciones de transferencia, se establece la siguiente expresión:

$$wno(G) = n_{z_i}(G) - n_{p_i}(G) \quad (3.10)$$

donde $n_{z_i}(G)$ es el número de ceros inestables y $n_{p_i}(G)$ es el número de polos inestables de la función de transferencia G , $wno(G)$ representa el número de vueltas (envolvimiento) al origen del plano z , si $wno(G)$ es positivo entonces las vueltas son en sentido inverso a las manecillas del reloj y viceversa.

Después, se debe verificar la siguiente condición:

$$wno(1 + G_2^*G_1) + n_{p_i}(G_1) - n_{p_i}(G_2) - n_{p_1}(G_2) = 0 \quad (3.11)$$

donde $n_{p_1}(G_2)$ es el número de polos estables de G_2 y G_2^* es el complejo conjugado de G_2 ; si no se cumple la condición descrita por la ecuación (3.11), entonces:

$$\delta_v(G_1, G_2) = 1 \quad (3.12)$$

de lo contrario:

$$0 \leq \delta_v(G_1, G_2) < 1 \quad (3.13)$$

3.4. Validación estadística

La validación estadística consiste en calcular (siempre y cuando se utilice un esquema de identificación como el mostrado en la Figura 2.1):

- La covarianza del error de predicción a la salida en lazo cerrado, $\varepsilon_{LC}(t)$,
- la correlación cruzada entre el error de predicción a la salida en lazo cerrado y los componentes del vector de observación $\phi(t)$ (salida y señal de control estimadas). El cálculo de esta se denomina también *prueba de blancura* ó *no-correlación*.

Antes de escribir las expresiones que se utilizaron para realizar la validación estadística, es conveniente presentar algunos conceptos básicos.

La media de un conjunto de datos se define como:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (3.14)$$

La covarianza es la variación que existe entre los datos de dos variables, expresada como:

$$S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N} \quad (3.15)$$

donde x y y son las variables para los N datos que intervienen en el estudio.

La desviación estándar es una medida de dispersión, una medida (cuadrática) de lo que se apartan los datos de su media, la cual se expresa de la siguiente manera:

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}} \quad (3.16)$$

La correlación es una medida sobre el grado de relación (dependencia) entre dos variables, sin importar cual es la causa y cual es el efecto. El manejo de unidades adimensionales permite el cálculo de un coeficiente sobre el que, de forma cómoda, se puede trabajar; este coeficiente representa la correlación existente entre dos variables y se define como:

$$j = \frac{S_{xy}}{(S_x \cdot S_y)} \quad (3.17)$$

los valores que este coeficiente puede tomar están comprendidos entre 1 y -1, teniéndose los siguientes criterios:

- $j = 1$, la correlación lineal es perfecta o directa (correlación lineal positiva).
- $j = 0$, no existe correlación lineal (correlación lineal nula).
- $j = -1$, la correlación lineal es perfecta o inversa (correlación lineal negativa).

Dado que se considera que el error de predicción a la salida tiene media cero, la covarianza entre dicho error y la salida estimada del sistema en lazo cerrado (utilizando el algoritmo CLOE) se calcula de la siguiente manera:

$$R_{xy}(i) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varepsilon_{LC}(n+i) \hat{y}(n) \quad , \quad i = 1, 2, 3 \dots, \text{máx}(n_A, n_B + d) \quad (3.18)$$

y la correlación cruzada:

$$RN(i) = \frac{R_{xy}(i)}{\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{y}^2(n) \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varepsilon_{LC}^2(n) \right) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.19)$$

Como criterio de validación se utiliza [Lan02]:

$$\text{máx} |RN(i)| \leq \frac{\beta}{\sqrt{N}} \quad (3.20)$$

donde β es el nivel de confianza y N es el número de muestras.

El calcular la correlación entre el error de predicción en lazo cerrado y los componentes del vector de observación, y comprobar de esta manera que dichas señales no están relacionadas (de acuerdo con el criterio de validación que se tomó, $\beta = 2.17$), está motivado en el hecho de que al no estar correlacionadas dichas señales (o secuencias) se tiene entonces una estimación de parámetros libre de bias [LK97].

Esta prueba se definió teniendo en cuenta que para una secuencia tipo *ruido blanco*, $RN(i)$ (con $i \neq 0$) tiende asintóticamente a una distribución gaussiana con un valor medio nulo y una distribución tipo: $\sigma = 1/\sqrt{N}$ [Lan02].

El intervalo de confianza considerado en la ecuación (3.20) corresponde a un nivel de confianza de 97% para la prueba de la hipótesis de una distribución gaussiana.

De tal manera que, si $RN(i)$ obedece a una distribución tipo campana de Gauss ($0, \sigma = 1/\sqrt{N}$), existe únicamente una probabilidad equivalente al 1.5% de que $RN(i)$ sea superior a $2.17/\sqrt{N}$, o inferior a $-2.17/\sqrt{N}$. Por lo tanto, si un valor calculado para $RN(i)$ se encuentra fuera del intervalo de confianza, ecuación (3.20), entonces debe ser

rechazada la hipótesis de que $\varepsilon_{LC}(t)$ y $\hat{y}(t)$ no están correlacionadas¹; y por lo tanto se dice que la señal (secuencia) $\varepsilon_{LC}(t)$ no tiene las propiedades de un ruido blanco gaussiano.

Varios niveles de confianza pueden ser definidos, algunos valores típicos para la prueba de blancura (independencia) se muestran en la Tabla 3.1².

Tabla 3.1: Intervalos de confianza.

Nivel de confianza	Criterio
97 % (criterio utilizado)	$\beta = 2.17$
95 %	$\beta = 1.96$
93 %	$\beta = 1.808$

La correlación entre el error de predicción en lazo cerrado y la señal de control estimada se calcula de manera similar, basta con sustituir el término $\hat{y}(n)$ (correspondiente a la salida estimada), por $\hat{u}(n)$ (correspondiente a la señal de control estimada) en las ecuaciones (3.18) y (3.19). El criterio de validación utilizado es el mismo.

3.5. Ejemplo de validación de un modelo estimado

Para mostrar los métodos de validación, descritos anteriormente, se estimó un modelo de un sistema a través de un proceso de identificación CLOE; los datos de entrada-salida del sistema simulado fueron tomados de un archivo bajado de internet [LZ05], el sistema en cuestión se presenta en la Figura 3.3.

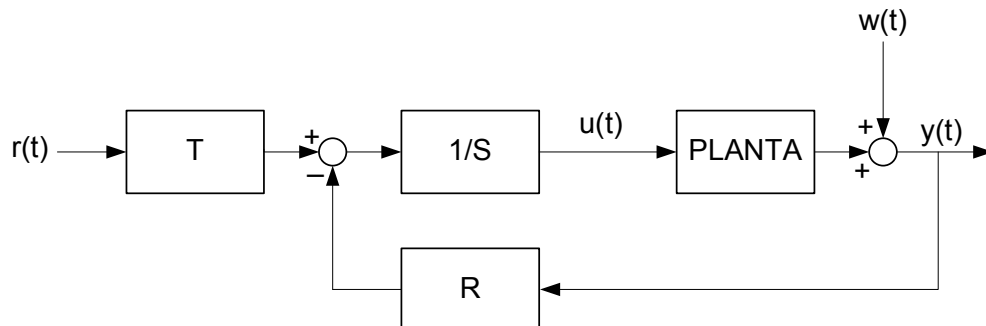


Figura 3.3: Sistema simulado.

¹ En distribuciones gaussianas, la no correlación implica independencia.

² Para una descripción más detallada de la obtención de los intervalos de confianza, consultar en [Lan02] la sección A.1.3 La cloche de Gauss Pp. 493 - 496.

El modelo nominal del sistema simulado es:

$$B(q^{-1}) = q^{-1} + 0.5q^{-2}$$

$$A(q^{-1}) = 1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2}$$

y los parámetros del controlador son:

$$R(q^{-1}) = 0.8659 - 1.2763q^{-1} + 0.5204q^{-2}$$

$$S(q^{-1}) = 1 - 0.6283q^{-1} - 0.3717q^{-2} \quad , \quad T(q^{-1}) = 0.11$$

Con los datos obtenidos de internet [LZ05] y el controlador que se mostró anteriormente, se estimó el siguiente modelo:

$$\hat{B}(q^{-1}) = 0.949q^{-1} + 0.4777q^{-2}$$

$$\hat{A}(q^{-1}) = 1 - 1.4828q^{-1} + 0.6728q^{-2}$$

A continuación se procede a validar el resultado que se obtuvo.

Validación en el dominio del tiempo: En la Figura 3.4 se muestra la comparación de las respuestas en lazo cerrado al escalón e impulso unitarios, del sistema nominal (real) y el sistema estimado, así como también el error derivado de ambas respuestas.

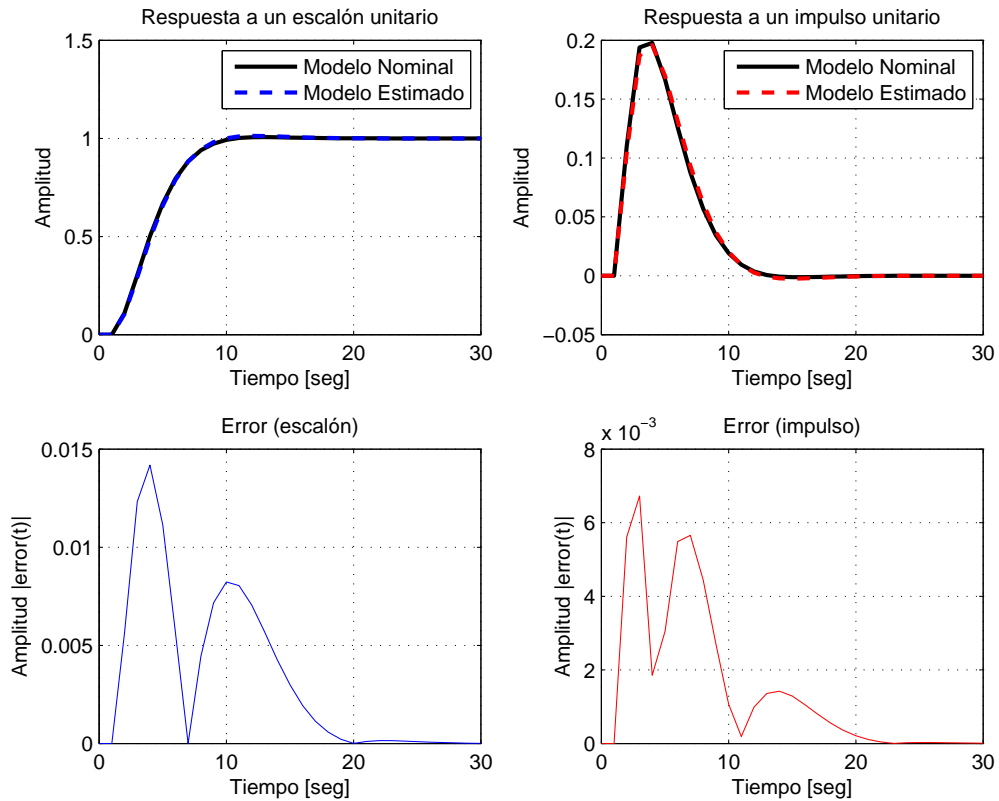


Figura 3.4: Comparación temporal (escalón e impulso).

En la Figura 3.4 se logra apreciar que las respuestas del sistema nominal (real) y el sistema estimado son muy cercanas, esto también se puede ver a través de la diferencia (error) entre las respuestas temporales, ya que la magnitud de éste (tanto para el escalón como para el impulso) es pequeña. Como conclusión se puede decir que el modelo del sistema estimado pasó la validación en el dominio del tiempo.

Índices de desempeño: Sí se tuviera la necesidad de hacer una selección más precisa entre varios modelos estimados, se pueden calcular los índices de desempeño, descritos anteriormente en la sección 3.3.1. Los índices de desempeño calculados para el sistema estimado, a partir del error a la salida con respecto al sistema real, se muestran en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2: Índices de desempeño.

	IAE	ITAE	ISE	ITSE	ISTSE	MSE	MCE
Escalón	0.1014	1.0144	0.0009	0.0074	0.0747	0	0.0053
Impulso	0.0451	0.4163	0.0002	0.0014	0.0122	0	0.0025

Como puede verse en la Tabla 3.2, el valor arrojado por los índices de desempeño son muy pequeños, tanto para el error generado por la respuesta ante un escalón como para el generado ante una respuesta al impulso. Esto se tuvo como resultado debido a que las respuestas del sistema nominal y el estimado (Figura 3.4) están casi superpuestas.

Validación en el dominio de la frecuencia: Como se había mencionado anteriormente, este tipo de validación consiste en comparar las gráficas de Bode del sistema en lazo cerrado “real” y el estimado. En este caso lo que se maneja como sistema en lazo cerrado “real” es aquel obtenido mediante un proceso de identificación en lazo abierto, tomando como un sólo objeto a la planta y al controlador; tal como se muestra en la Figura 3.1. El sistema estimado en lazo cerrado es aquel formado por el modelo del sistema estimado y el controlador, que es conocido. Las gráficas de Bode del ejemplo desarrollado se muestran a continuación en la Figura 3.5.

Cercanía de polos en lazo cerrado: Tal como se mencionó en la sección 3.3, este tipo de validación consiste graficar los polos en lazo cerrado del sistema “real” y el estimado; estos polos son derivados de la ecuación característica (en lazo cerrado) de los dos sistemas a comparar. Los polos son graficados en el plano z , debido a que se utilizan modelos en tiempo discreto. La comparación gráfica de la cercanía de polos en lazo cerrado, del ejemplo desarrollado, se muestra en la Figura 3.6.

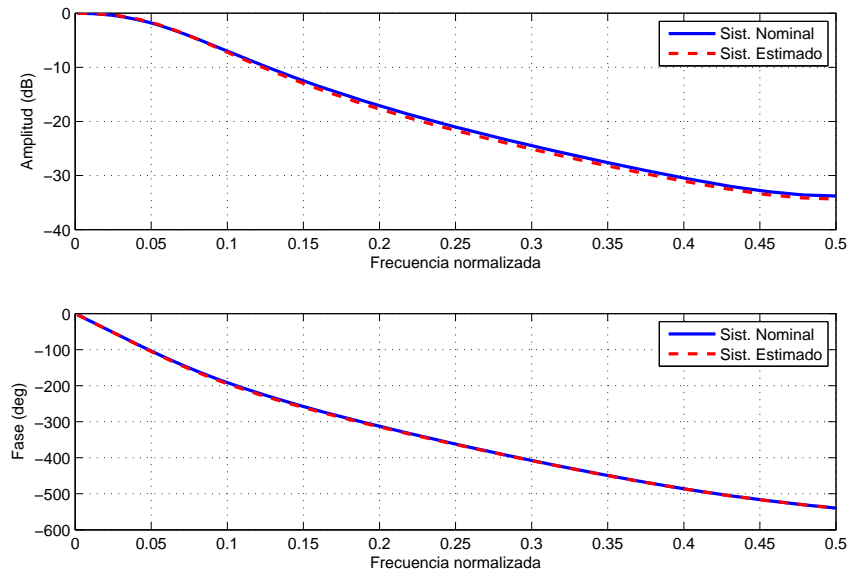


Figura 3.5: Gráficas de Bode (magnitud y fase).

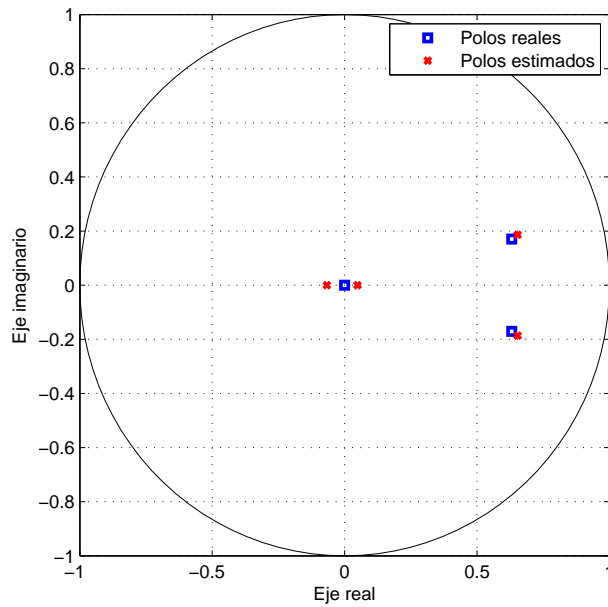


Figura 3.6: Comparación de polos en lazo cerrado.

En la Figura 3.5 se observa que tanto los bodes del modelo nominal y del estimado están casi superpuestos, con lo que se puede decir que se obtuvo una buena estimación del modelo con base en la validación en el dominio de la frecuencia. Ocurre algo similar

con respecto a la cercanía de los polos reales con los estimados (Figura 3.6), ya que estos también se encuentran muy cercanos.

Cuando se cuentan con varios modelos estimados, no siempre es posible establecer cuales polos estimados son los más cercanos a los polos en lazo cerrado del sistema “real”. Por ese motivo resulta útil contar con una medida cuantitativa para establecer dicha cercanía. La distancia normalizada de Vinnicombe permite cuantificar la cercanía entre dos funciones de transferencia [Vin93], ésta adquiere valores comprendidos entre 0 y 1, que son los límites de mayor cercanía o lejanía, respectivamente. La **distancia normalizada de Vinnicombe** calculada para el ejemplo desarrollado fue: **0.0281**.

Validación estadística: Este tipo de validación esta conformado por el cálculo de la correlación cruzada entre el error de estimación en lazo cerrado, $\varepsilon_{LC}(t)$, y: la salida estimada, $\hat{y}(t)$, y la señal de control estimada, $\hat{u}(t)$; así como el cálculo de la covarianza del error de predicción. La Figura 3.7³ muestra las correlaciones cruzadas entre: el error de predicción y la salida estimada y el error de predicción y la señal de control estimada, para el ejemplo desarrollado. Con el cálculo de dicha correlación se busca demostrar que no existe relación entre las señales involucradas ($\varepsilon_{LC}(t)-\hat{y}(t)$, $\varepsilon_{LC}(t)-\hat{u}(t)$).

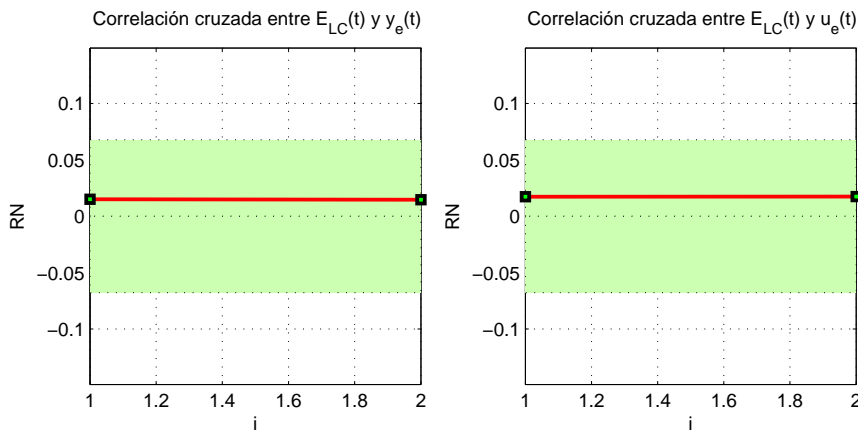


Figura 3.7: Correlación cruzada entre: $\varepsilon_{LC}(t)-\hat{y}(t)$, $\varepsilon_{LC}(t)-\hat{u}(t)$.

En las gráficas mostradas en la Figura 3.7, la franja sombreada muestra el criterio de validación tomado, que corresponde a un nivel de confianza del 97%. Se logra apreciar que esto se cumple al estar las curvas de correlación dentro de la franja sombreada. Finalmente, la covarianza del error de predicción en lazo cerrado es: **0.0299**. Sí se tienen varios modelos, aquel que arroje el valor de covarianza del error menor y menores valores dentro de la gráfica de correlación cruzada, será el mejor modelo de acuerdo con este criterio de validación.

³ En la Figura 3.7, $E_{LC}(t)$ = error de predicción en lazo cerrado, $y_e(t)$ = salida estimada en lazo cerrado y $u_e(t)$ = señal de control estimada.

Como conclusión se puede decir que el modelo estimado, para el ejemplo desarrollado (mostrado en la Figura 3.3), cumplió con todos los criterios de validación utilizados en el presente trabajo. Se obtuvo una gran similitud en las respuestas temporales, así como en las gráficas de Bode, se obtuvo una buena cercanía de polos y se cumplió con el criterio establecido para la validación estadística.

3.6. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se describieron los procesos de validación empleados en el presente trabajo. La herramienta desarrollada para realizar la validación del modelo estimado permite el empleo de todas las técnicas descritas: validación en el dominio del tiempo, validación en el dominio de la frecuencia, validación por cercanía de polos en lazo cerrado y validación estadística.

En la práctica se comprobó que las técnicas de validación que tienen más peso son las correspondientes al dominio de la frecuencia y la cercanía de polos, ya que verificándose éstas se asegura un buen resultado en la similitud de las respuestas temporales (validación en el dominio del tiempo); sin embargo una buena similitud en las respuestas temporales e índices de desempeño pequeños, no aseguran una cercanía entre los bodes y los polos del sistema “real” y estimado.

El único inconveniente existente con las técnicas de validación basadas en las gráficas de Bode y de polos en lazo cerrado, es que se requiere de un buen resultado en el proceso de identificación en lazo abierto de todo el sistema “real” (Figura 3.1). Aun así la teoría y herramientas existentes en lo referente a la identificación en lazo abierto permiten por lo general conseguir buenos resultados [Lju99].

La validación estadística generalmente ayuda a discernir entre un modelo estimado y otro, cuando ambos cumplieron con las demás especificaciones establecidas por las demás técnicas de validación.

Capítulo 4

Reducción del orden del controlador

Generalmente la combinación de modelos complejos de sistemas dinámicos y el diseño de controladores robustos da como resultado que dichos controladores sean de alto orden, lo cual dificulta la implementación práctica. En este capítulo se presenta la forma en que la identificación de sistemas en lazo cerrado, con estructura tipo CLOE, puede ser utilizada para reducir el orden del controlador.

El cambio principal que es necesario hacer al algoritmo de identificación es: considerar al controlador como la parte desconocida del sistema en lazo cerrado (Figura 2.1) y a la planta como la parte conocida (de la cual se puede estimar un modelo mediante un proceso de identificación en lazo cerrado). De esta manera la identificación de sistemas en lazo cerrado se convierte en una herramienta para el cálculo de controladores o reguladores de orden reducido.

En este capítulo se presenta también una técnica sencilla para el diseño y cálculo de controladores robustos.

4.1. Reducción del orden de los controladores

La complejidad (ordenes de los polinomios R y S) de los controladores basados en modelos identificados depende de [Lan02]:

- La complejidad del modelo identificado de la planta o proceso.
- Las especificaciones de desempeño del controlador.
- Las restricciones.

El polinomio característico que define los polos del sistema en lazo cerrado es:

$$P(q^{-1}) = A(q^{-1})H_S(q^{-1})S'(q^{-1}) + q^{-d}H_R(q^{-1})R'(q^{-1}) \quad (4.1)$$

donde B , A corresponden al numerador y denominador (respectivamente) de la planta, d es el retardo puro de la planta, H_R y H_S son a las partes fijas del controlador (que generalmente son introducidas por razones de robustez y desempeño) y S' y R' corresponden a las partes del controlador de las cuales se busca reducir el orden.

Existen dos maneras de llevar a cabo la reducción del orden de un controlador [LKC01], una es de forma indirecta y la otra de forma directa.

4.1.1. Reducción indirecta

Esta reducción es llevada a cabo en dos etapas, la primera consiste en la estimación de una representación de menor orden de la planta (esta puede ser llevada a cabo mediante identificación en lazo cerrado CLOE); posteriormente en la segunda etapa se procede a calcular un nuevo controlador con base en la nueva representación estimada de dicha planta.

El encontrar una representación de orden menor para la planta, no necesariamente significa que se podrá calcular un nuevo controlador de menor orden, además, los posibles errores existentes entre la planta real y el modelo estimado se transmitirán al controlador, ya que éste se diseña con base en el modelo estimado de la planta.

Sin embargo, y a pesar de las deficiencias mencionadas sobre el método indirecto, resulta una buena primera opción para intentar reducir el orden del controlador.

4.1.2. Reducción directa

El objetivo de este tipo de reducción es el de obtener un controlador aproximado de orden reducido que conserve las propiedades nominales en lazo cerrado. Esta manera es más apropiada ya que la obtención del controlador de orden menor es llevada a cabo de manera directa, sin la necesidad de encontrar una nueva representación de la planta.

Una manera de llevar a cabo la reducción directa del controlador es mediante el empleo de la identificación de sistemas en lazo cerrado con estructura CLOE, tal como se presenta en [LCK00], [LKC01], [Lan02] y [Lan04]. El utilizar CLOE para tal propósito

permite trabajar con datos simulados $[K, \hat{G}]$, pero también brinda la posibilidad de poder trabajar con datos reales $[K, G]$ con los que se obtienen mejores resultados.

Para poder utilizar la identificación de sistemas en lazo cerrado para lograr la reducción directa del controlador, se deben realizar pequeñas modificaciones al algoritmo CLOE; estas modificaciones dependen del esquema de identificación utilizado.

Esquemas de identificación en lazo cerrado

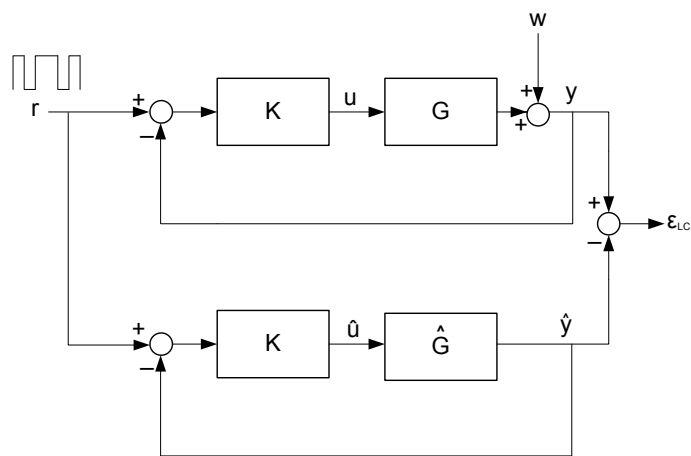


Figura 4.1: Esquema de identificación A.

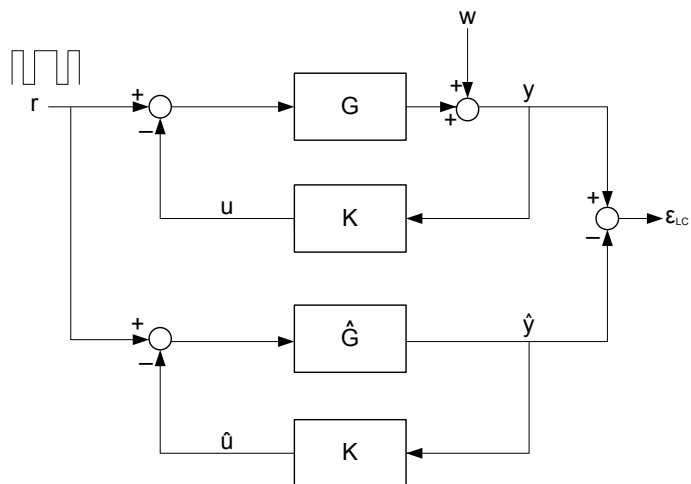


Figura 4.2: Esquema de identificación B.

A partir del esquema de identificación en lazo cerrado mostrado en la Figura 2.1, se pueden derivar otros dos esquemas, tal como se presenta en [Lan02]. El primero

(esquema A) resulta de aplicar la señal de excitación externa (que puede ser una señal binaria pseudo-aleatoria SBPA) en la entrada del controlador o regulador, lo anterior se encuentra representado en la Figura (4.1); el segundo (esquema B) se obtiene al aplicar la señal de excitación externa a la salida del controlador (entrada de la planta), tal como se muestra en la Figura (4.2).

El esquema A resulta de hacer $\mathbf{T} = \mathbf{R}$ en las ecuaciones (2.9) y (2.13), a su vez el esquema B resulta de hacer $\mathbf{T} = \mathbf{S}$ en las mismas ecuaciones.

Los esquemas de identificación empleados para reducir el orden del controlador son derivados de los presentados en las Figuras 4.1 y 4.2, sólo se realiza una permutación entre el controlador (K) y la planta (G); de esta manera se obtienen los esquemas presentados en las figuras 4.3 y 4.4, que corresponden a los algoritmos CLOM (*Closed Loop Output Matching*) y CLIM (*Closed Loop Input Matching*), respectivamente.

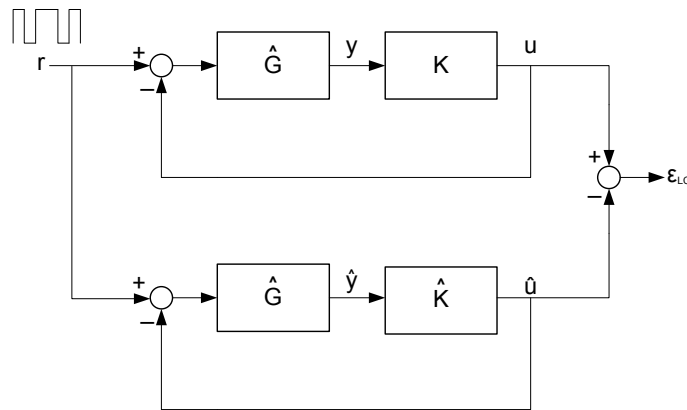


Figura 4.3: Identificación CLOM.

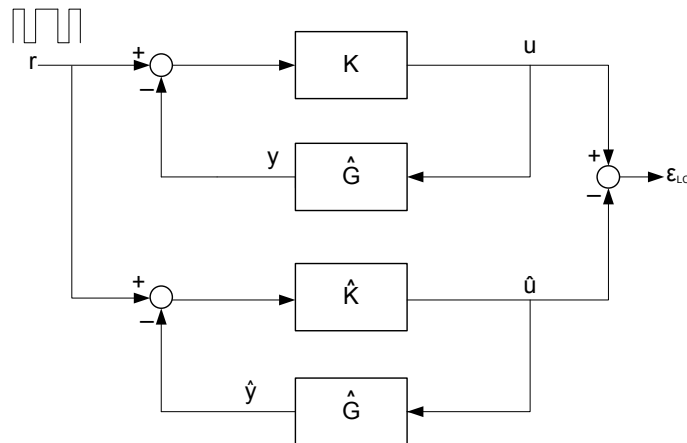


Figura 4.4: Identificación CLIM.

Como se logra apreciar en las dos figuras anteriores, la reducción directa del controlador, empleando identificación en lazo cerrado, consiste básicamente en ahora estimar el controlador en lugar de la planta.

4.2. Algoritmo de identificación CLOM

En la Figura 4.5 se muestra el esquema de identificación en lazo cerrado para la reducción directa del orden del controlador, empleando el algoritmo CLOM.

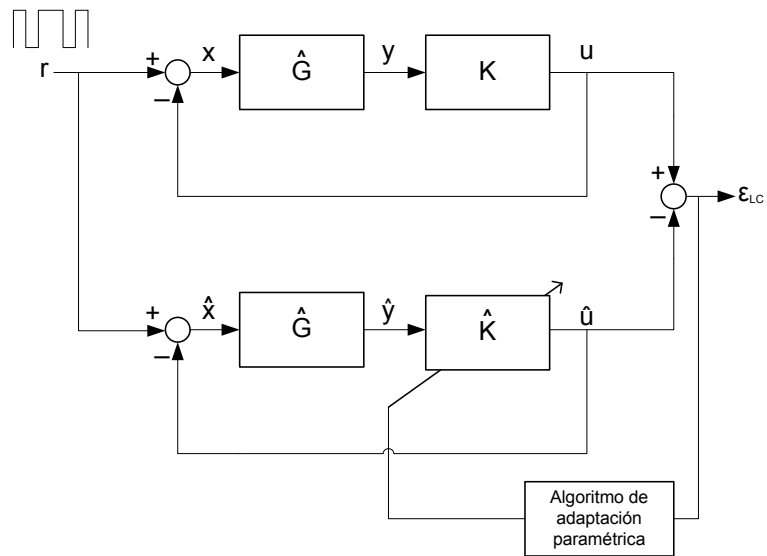


Figura 4.5: Esquema de identificación CLOM.

de la Figura 4.5 se tiene que $\hat{G}(q^{-1})$ y $K(q^{-1})$ representan las funciones discretas de transferencia de la planta y el controlador (respectivamente); las cuales se definen como:

$$\hat{G}(q^{-1}) = \frac{q^{-d}\hat{B}(q^{-1})}{\hat{A}(q^{-1})} = \frac{q^{-d} [q^{-1}\hat{B}^*(q^{-1})]}{1 + q^{-1}\hat{A}^*(q^{-1})} \quad (4.2)$$

$$K(q^{-1}) = \frac{R(q^{-1})}{S(q^{-1})} \quad (4.3)$$

donde:

$$R(q^{-1}) = H_R(q^{-1}) R'(q^{-1}) = H_R(q^{-1}) [r_0 + r_1q^{-1} + \dots + r_{n_{R'}}q^{-n_{R'}}] \quad (4.4)$$

$$S(q^{-1}) = H_S(q^{-1}) S'(q^{-1}) = H_S(q^{-1}) [1 + q^{-1} S^*(q^{-1})] \quad (4.5)$$

$$S^*(q^{-1}) = s_1 + s_2 q^{-1} + \dots + s_{n_{S'}} q^{-n_{S'}+1} \quad (4.6)$$

La señal de control está definida por la siguiente ecuación (se omite el término (q^{-1}) para facilitar la lectura):

$$u(t) = \frac{H_R R'}{H_S S'} y(t) \quad (4.7)$$

de donde se propone que

$$y'(t) = \frac{H_R}{H_S} y(t) \quad (4.8)$$

donde $y'(t)$ representa la señal de salida filtrada por las partes fijas del controlador (H_R y H_S), sustituyendo la ecuación (4.8) en la ecuación (4.7) se tiene:

$$u(t) = \frac{R'}{S'} y'(t) \quad (4.9)$$

y a partir de la ecuación (4.9) se deriva la siguiente expresión:

$$u(t+1) = -S^* u(t) + R' y'(t+1) = \Gamma^T \Psi(t) \quad (4.10)$$

donde:

$$\Psi(t) = [-u(t), \dots, -u(t - n_{S'} + 1), y'(t+1), \dots, y'(t - n_{R'} + 1)]^T \quad (4.11)$$

$$\Gamma = [s_1, \dots, s_{n_{S'}}, r_0, \dots, r_{n_{R'}}]^T \quad (4.12)$$

La señal de control estimada se define como:

$$\hat{u}(t+1) = -\hat{S}^* \hat{u}(t) + \hat{R}' \hat{y}'(t+1) = \hat{\Gamma}^T \gamma(t) \quad (4.13)$$

donde:

$$\gamma(t) = [-\hat{u}(t), \dots, -\hat{u}(t - n_{S'} + 1), \hat{y}'(t+1), \dots, \hat{y}'(t - n_{R'} + 1)]^T \quad (4.14)$$

$$\hat{\Gamma} = [\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_{n_{S'}}, \hat{r}_0, \dots, \hat{r}_{n_{R'}}]^T \quad (4.15)$$

$$\hat{y}'(t) = \frac{H_R}{H_S} \hat{y}(t) \quad (4.16)$$

El error de predicción en lazo cerrado se define ahora como:

$$\varepsilon_{LC}(t+1) = u(t+1) - \hat{u}(t+1) \quad (4.17)$$

4.2.1. Algoritmo CLOM

Para implementar este algoritmo es necesario contar con la predicción de la señal de control a priori (basada en $\hat{\Gamma}(t)$) y a posteriori (basada en $\hat{\Gamma}(t+1)$), que está dada por:

a priori:

$$\hat{u}^\circ(t+1) = \hat{u}(t+1|\hat{\Gamma}(t)) = \hat{\Gamma}^T(t) \gamma(t) \quad (4.18)$$

a posteriori:

$$\hat{u}(t+1) = \hat{u}(t+1|\hat{\Gamma}(t+1)) = \hat{\Gamma}^T(t+1) \gamma(t) \quad (4.19)$$

lo mismo ocurre con el error de predicción en lazo cerrado, para el cual se tiene que:

a priori:

$$\varepsilon_{LC}^\circ(t+1) = u(t+1) - \hat{u}^\circ(t+1) \quad (4.20)$$

a posteriori:

$$\varepsilon_{LC}(t+1) = u(t+1) - \hat{u}(t+1) \quad (4.21)$$

El algoritmo de adaptación paramétrica utilizado es el representado por las ecuaciones (4.22), (4.23) y (4.24) mostradas a continuación:

$$\varepsilon_{LC}(t+1) = \frac{\varepsilon_{LC}^{\circ}(t+1)}{1 + \gamma^T(t) F(t) \gamma(t)} \quad (4.22)$$

$$\hat{\Gamma}(t+1) = \hat{\Gamma}(t) + F(t) \gamma(t) \varepsilon_{LC}(t+1) \quad (4.23)$$

$$F(t+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)} \times \left[F(t) - \frac{F(t) \gamma(t) \gamma^T(t) F(t)}{\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} + \gamma^T(t) F(t) \gamma(t)} \right] \quad (4.24)$$

Observando la ecuación (4.22) se puede apreciar que el error de predicción en lazo cerrado a posteriori ($\varepsilon_{LC}(t+1)$), puede ser expresado en términos del error a priori ($\varepsilon_{LC}^{\circ}(t+1)$); con lo que, a partir de la ecuación (4.23), se puede calcular la señal de control a posteriori.

4.3. Algoritmo de identificación CLIM

En seguida, en la Figura 4.6, se muestra el esquema de identificación en lazo cerrado para la reducción directa del orden del controlador, empleando el algoritmo CLIM.

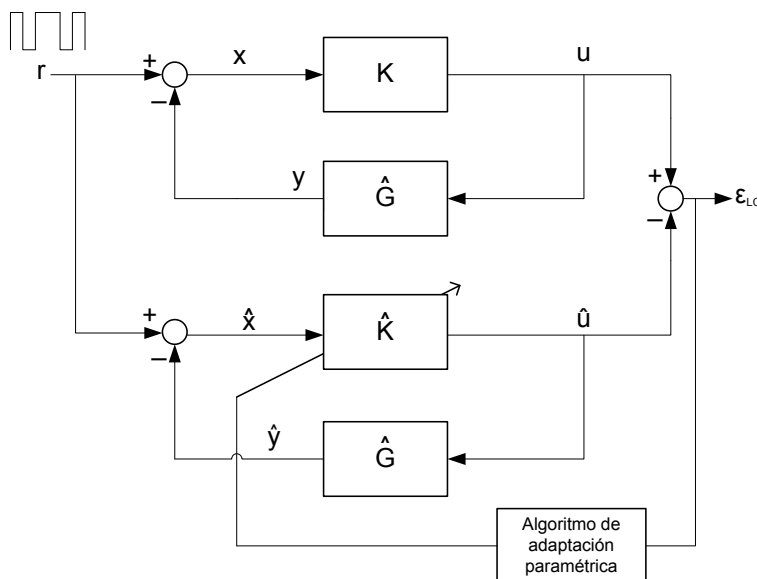


Figura 4.6: Esquema de identificación CLIM.

De la Figura 4.6 se tiene que $G(q^{-1})$ y $K(q^{-1})$ representan las funciones discretas de transferencia de la planta y el controlador (respectivamente); las ecuaciones (4.2)-(4.6), presentadas anteriormente, definen a dichas funciones de transferencia.

Para este esquema de identificación la señal de control está definida por la siguiente ecuación:

$$u(t) = \frac{H_R R'}{H_S S'} x(t) \quad (4.25)$$

de donde se propone la siguiente ecuación auxiliar

$$x'(t) = \frac{H_R}{H_S} x(t) \quad (4.26)$$

donde $x'(t)$ representa la señal $x(t)$ filtrada por las partes fijas del controlador (H_R y H_S), sustituyendo la ecuación (4.26) en la ecuación (4.25) se tiene:

$$u(t) = \frac{R'}{S'} x'(t) \quad (4.27)$$

y a partir de la ecuación (4.27) se obtiene la siguiente expresión para $u(t+1)$

$$u(t+1) = -S^* u(t) + R' x'(t+1) = \Gamma^T \Psi(t) \quad (4.28)$$

donde:

$$\Psi(t) = [-u(t), \dots, -u(t - n_{S'} + 1), x'(t+1), \dots, x'(t - n_{R'} + 1)]^T \quad (4.29)$$

$$\Gamma = [s_1, \dots, s_{n_{S'}}, r_0, \dots, r_{n_{R'}}]^T \quad (4.30)$$

La señal de control estimada se define como:

$$\hat{u}(t+1) = -\hat{S}^* \hat{u}(t) + \hat{R}' \hat{x}'(t+1) = \hat{\Gamma}^T \gamma(t) \quad (4.31)$$

donde:

$$\gamma(t) = [-\hat{u}(t), \dots, -\hat{u}(t - n_{S'} + 1), \hat{x}'(t+1), \dots, \hat{x}'(t - n_{R'} + 1)]^T \quad (4.32)$$

$$\hat{\Gamma} = [\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_{n_{S'}}, \hat{r}_0, \dots, \hat{r}_{n_{R'}}]^T \quad (4.33)$$

$$\hat{x}'(t) = \frac{H_R}{H_S} \hat{x}(t) \quad (4.34)$$

La ecuación que define el error de predicción en lazo cerrado es exactamente igual a la utilizada para el algoritmo CLOM, (ecuación (4.17)).

$$\varepsilon_{LC}(t+1) = u(t+1) - \hat{u}(t+1) \quad (4.35)$$

4.3.1. Algoritmo CLIM

Para implementar este algoritmo también es necesario contar con la predicción de la señal de control y el error de predicción en lazo cerrado, a priori y a posteriori, ecuaciones (4.18)-(4.21).

El algoritmo de adaptación paramétrica utilizado para la estimación de los parámetros del controlador (de orden reducido), es igual al utilizado anteriormente en CLOM, representado por las ecuaciones (4.22)-(4.24).

Los algoritmos CLOM y CLIM, empleados para llevar a cabo la reducción directa de controladores, son muy similares; la diferencia radica en la manera de construir el vector de observación estimado $[\gamma(t)]$, ecuaciones (4.14) y (4.32) respectivamente.

Para ambos algoritmos el resultado final (polinomios R y S de orden reducido) tendrán la siguiente forma:

$$R = H_R R' = r_0 + r_1 q^{-1} + \dots + r_{n_R} q^{-n_R} \quad , \quad n_R = n_{H_R} + n_{R'} \quad (4.36)$$

$$S = H_S S' = 1 + s_1 q^{-1} + \dots + s_{n_S} q^{-n_S} \quad , \quad n_S = n_{H_S} + n_{S'} \quad (4.37)$$

Añadir partes fijas al controlador es de mucha utilidad para el diseñador, debido a que con estas se pueden establecer comportamientos deseados del mismo (fijar polos). Las partes fijas más comunes que se añaden al controlador son [Lan02]: un integrador al polinomio S , $H_S(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$, para asegurar un error cercano a cero en estado estable y un cero en -1 , $H_R(q^{-1}) = 1 + q^{-1}$, a lo que se denomina “abrir el lazo”, que hace que el controlador se comporte como un filtro pasa bajas, rechazando señales con frecuencias mayores 0.5 veces la frecuencia de muestreo.

4.4. Cálculo de un controlador robusto

Para poder implementar un proceso de identificación de sistemas en lazo cerrado con estructura tipo CLOE, se requiere un controlador. Por tal motivo resulta de utilidad contar con una herramienta que permita calcular de manera automática dicho controlador. En esta sección se describe una manera de calcular un controlador robusto, la cual fue implementada dentro en el toolbox final.

4.4.1. Colocación de polos con calibración de la función de sensibilidad a la salida

El diseño del controlador mediante colocación de polos, con ajuste o calibración de la función de sensibilidad a la salida, consiste (*grosso modo*) en el cálculo de los polinomios del controlador, R y S , que son necesarios para obtener una respuesta “deseada” en lazo cerrado, tal como se muestra en [AsW95] y [AsW97]. Una vez encontrados dichos polinomios se procede a verificar que la función de sensibilidad a la salida, S_{yp} , se encuentre dentro de ciertos márgenes (de ganancia y retardo) para asegurar robustez [LL99], [LLR99], [Lan02].

La técnica de colocación de polos consiste en resolver la ecuación de Bezout, que es la ecuación característica del sistema en lazo cerrado (empleando un esquema como el mostrado en la Figura 2.1), dicha ecuación es la siguiente:

$$A(q^{-1})S(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})R(q^{-1}) = P(q^{-1}) \quad (4.38)$$

donde $A(q^{-1})$ y $B(q^{-1})$ son los polinomios que representan a la planta, q^{-d} es el retardo puro de la planta, $R(q^{-1})$ y $S(q^{-1})$ son los polinomios que serán calculados del controlador (numerador y denominador, respectivamente) y $P(q^{-1})$ es el polinomio deseado del sistema en lazo cerrado (polos del sistema en lazo cerrado).

De la ecuación (4.38) se derivan las siguientes expresiones:

$$P(q^{-1}) = P_D(q^{-1})P_F(q^{-1}) \quad (4.39)$$

$$R(q^{-1}) = R'(q^{-1})H_R(q^{-1}) \quad (4.40)$$

$$S(q^{-1}) = S'(q^{-1})H_S(q^{-1}) \quad (4.41)$$

donde $P_D(q^{-1})$ contiene los polos dominantes (deseados) del sistema en lazo cerrado, $P_F(q^{-1})$ contiene polos auxiliares que permiten calibrar la función de sensibilidad, $R'(q^{-1})$ y $S'(q^{-1})$ son la parte a calcular (resolviendo la ecuación de Bezout) de los polinomios del controlador y $H_R(q^{-1})$ y $H_S(q^{-1})$ son las partes fijas de los polinomios R y S (respectivamente), dichas partes fijas también pueden ser seleccionadas para ajustar la función de sensibilidad.

Para el presente trabajo se utilizó el siguiente procedimiento para resolver la ecuación (4.38).

Paso 1: primeramente se establece lo siguiente (se omite el término q^{-1} para mayor claridad):

Datos con los que se cuenta: Polinomios A , B y retardo q^{-d}

Especificaciones: Polinomio P (polos deseados).

Condiciones de compatibilidad:

$$\deg R' = \deg A + \deg H_S - 2$$

$$\deg S' = \deg B + d + \deg H_R - 2$$

$$\deg P_F = \deg A + \deg S - \deg P_D$$

Condiciones de causalidad:

$$\deg R \leq \deg S$$

$$\deg T \leq \deg R$$

Paso 2: Encontrar las soluciones para R' y S' a partir de la ecuación (4.38).

Paso 3: Encontrar el polinomio T de la siguiente manera:

$$T = \frac{P(1)}{B(1)} \quad (4.42)$$

Paso 4: Con $R = R'H_R$ y $S = S'H_S$ calcular la señal de control:

$$Su(t) = -Ry(t) + Tr(t) \quad (4.43)$$

donde $u(t)$, $y(t)$ y $r(t)$ son las señales de control, salida y referencia respectivamente.

Una vez que se han calculado los polinomios R , S y T del controlador, se procede a verificar que la función de sensibilidad a la salida se encuentre delimitada dentro de ciertos márgenes, lo cual hará robusto al controlador [LL99], [Lan02].

Si la función de sensibilidad a la salida no se encuentra dentro de los márgenes de robustez, se procede a calcular nuevamente el controlador (polinomios R , S y T) variando los términos P_F , H_R y H_S . Por lo que el cálculo de un controlador robusto es un proceso iterativo.

4.4.2. Márgenes de robustez

Se tiene que el esquema en lazo cerrado utilizado es el siguiente (Figura 4.7).

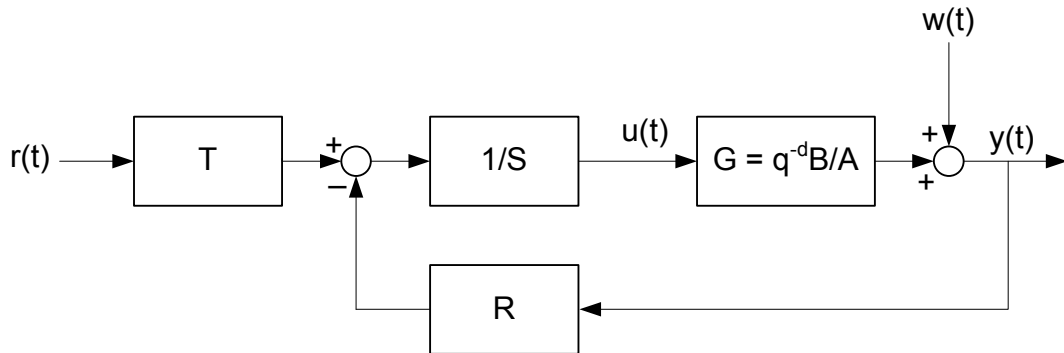


Figura 4.7: Sistema en lazo cerrado.

La función de sensibilidad a la salida, S_{yp} , es la relación existente entre la señal de salida en lazo cerrado, $y(t)$, y la señal de ruido, $w(t)$, provocada por perturbaciones. Dicha relación se encuentra expresada en las ecuaciones (4.44) y (4.45).

$$\frac{y(t)}{w(t)} = S_{yp} = \frac{1}{1 + \frac{q^{-d}BR}{AS}} \quad (4.44)$$

$$S_{yp} = \frac{AS}{AS + q^{-d}BR} \quad (4.45)$$

Sustituyendo la ecuación (4.38) en la ecuación (4.45), la función de sensibilidad se reduce a:

$$S_{yp} = \frac{AS}{P} \quad (4.46)$$

Para describir los márgenes de robustez asociados con la función de sensibilidad a la salida, S_{yp} , es conveniente hacer un análisis de la estabilidad de un sistema en lazo cerrado.

Estabilidad de un sistema en lazo cerrado

La Figura 4.8 muestra la gráfica de Nyquist de una función de transferencia discreta en lazo abierto de un sistema que incluye a un proceso que se representa con la función de transferencia $G(q^{-1}) = B(q^{-1})/A(q^{-1})$ y a un regulador R-S-T.

Para este caso la función de transferencia en lazo abierto del sistema es la siguiente:

$$H_{LA}(e^{-j\omega}) = \frac{B(e^{-j\omega})R(e^{-j\omega})}{A(e^{-j\omega})S(e^{-j\omega})} \quad (4.47)$$

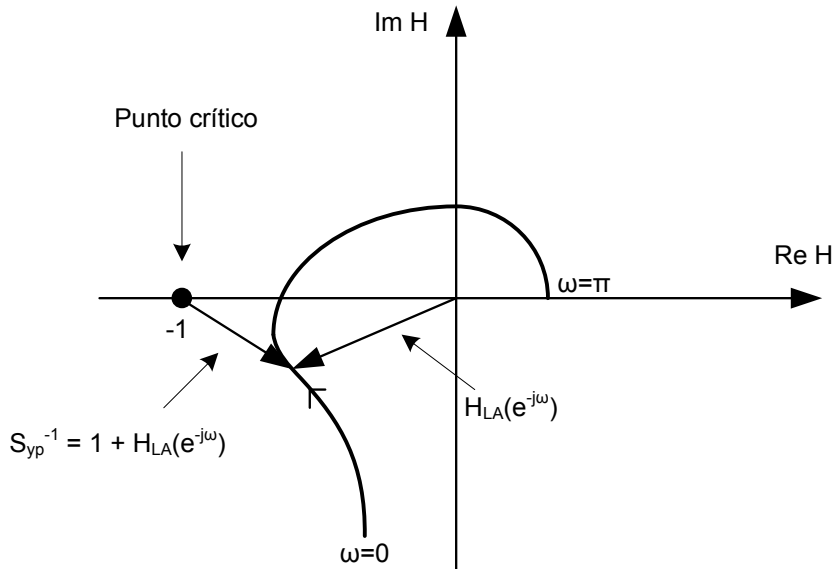


Figura 4.8: Gráfica de Nyquist de H_{LA} .

En la Figura 4.8, un vector que va del origen a un punto de la gráfica de Nyquist representa a $H_{LA}(j\omega)$ en una cierta frecuencia normalizada $\omega = \omega T_m = 2\pi f/f_m$.

Dentro de la Figura 4.8, el punto $[-1, j0]$ se denomina *punto crítico* [Lan04]. Y como se observa en dicha figura, el vector que va desde el punto crítico a la gráfica de Nyquist del sistema en lazo abierto, $H_{LA}(j\omega)$, está dado por la expresión:

$$S_{yp}^{-1}(z^{-1}) = 1 + H_{LA}(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1})} \quad (4.48)$$

dicho vector representa el inverso de la función de sensibilidad a la salida S_{yp} , como logra apreciarse los ceros de la ecuación (4.48) definen a los polos del sistema en lazo cerrado (los cuales deben de estar dentro del círculo unitario $|z| < 1$).

Las condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad asintótica de un sistema discreto en lazo cerrado están dadas por el criterio de Nyquist [Lan02].

Criterio de estabilidad de Nyquist

Se dice que el sistema es estable sí: la gráfica de Nyquist de la función de transferencia en lazo abierto, $H_{LA}(j\omega)$, cuando es dibujada en el sentido de frecuencias crecientes (de 0 a f_m), deja en su lado izquierdo al punto crítico, $[-1, j0]$; y el número de rodeos, a dicho punto crítico, en sentido inverso de las manecillas del reloj es igual al número de polos inestables en lazo abierto¹.

Robustez de un sistema en lazo cerrado

La distancia mínima con relación al punto crítico $[-1, j0]$ va a caracterizar la “reserva de estabilidad” o la “robustez” del sistema en lazo cerrado frente a las variaciones de los parámetros del sistema (o incertidumbres sobre el valor de los parámetros).

Los elementos siguientes (márgenes de robustez) sirven para caracterizar el alejamiento con relación al punto $[-1, j0]$ (ver Figura 4.9).

- **Margen de ganancia, ΔG .**
- Margen de fase, $\Delta\Phi$.
- **Margen de retardo, $\Delta\tau$.**
- Margen de módulo, ΔM .

¹ El criterio es válido aun en el caso de una simplificación de polos y ceros inestables. El número de rodeos al punto crítico debe ser igual al número de polos inestables sin tomar en cuenta dichas simplificaciones [Lan02].

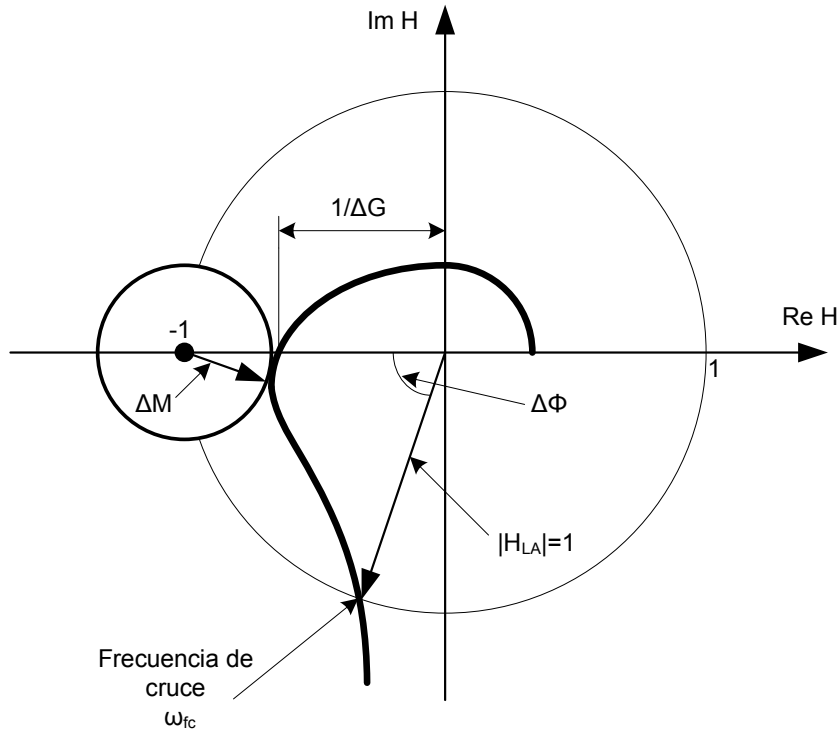


Figura 4.9: Márgenes de robustez.

Margen de Ganancia

El margen de ganancia (ΔG) es igual al inverso de la ganancia de $H_{LA}(j\omega)$ en la frecuencia a la que el desfaseamiento es de -180° . El margen de ganancia se expresa en decibeles.

$$\Delta G = \frac{1}{|H_{LA}(j\omega_{180})|} \quad \text{para } \angle\Phi(\omega_{180}) = -180^\circ \quad (4.49)$$

Los valores típicos para un buen margen de ganancia son:

$$\Delta G \geq 2 \text{ (6dB)} \quad [\text{mín : 1.6 (4dB)}]$$

Margen de fase

Se define como la fase adicional que es necesario añadir para obtener, a partir de la frecuencia a la cual se tienen un desfaseamiento total de $\angle\Phi = -180^\circ$, la frecuencia a la cual la ganancia del sistema en lazo abierto es unitario (ver Figura 4.9).

$$\Delta\Phi = 180^\circ - \angle\Phi(\omega_{fc}) \quad \text{para } |H_{LA}(j\omega_{fc})| = 1 \quad (4.50)$$

donde ω_{fc} (frecuencia de cruce) corresponde a la frecuencia para la que la gráfica de Nyquist del sistema cruza el círculo unitario.

Los valores típicos para un buen margen de fase son:

$$30^\circ \leq \Delta\Phi \leq 60^\circ$$

Margen de retardo

Un retardo puro introduce un desfase proporcional a la frecuencia ω . Para una cierta frecuencia ω_0 , el desfase que introduce un retardo puro τ es:

$$\angle\Phi(\omega_0) = \omega_0\tau$$

De esta forma se puede convertir el margen de fase en un “margen de retardo”; el margen de retardo ($\Delta\tau$) es el retardo adicional que puede tolerar el sistema en lazo abierto antes de provocar inestabilidad al sistema en lazo cerrado.

$$\Delta\tau = \frac{\Delta\Phi}{\omega_{fc}} \quad (4.51)$$

si la gráfica de Nyquist interseca en varias ocasiones (i) al círculo unitario, entonces el margen de retardo se define como:

$$\Delta\tau = \min_i \frac{\Delta\Phi_i}{\omega_{fc}^i} \quad (4.52)$$

Un valor típico del margen de retardo es: una fracción del retardo puro del sistema (10%) o de la respuesta en el tiempo (10%), usualmente $1T_m$, donde T_m es el tiempo de muestreo.

Margen de Módulo

El margen de módulo (ΔM) se define como el radio de un círculo con centro en $[-1, j0]$, dicho círculo es tangente a la gráfica (traza) de Nyquist del sistema $[H_{LA}(j\omega)]$ (ver Figura 4.9). El margen de módulo, ΔM , está dado por:

$$\Delta M = \min |1 + H_{LA}(j\omega)| = \min |S_{yp}^{-1}(j\omega)| = (\max |S_{yp}(j\omega)|)^{-1} \quad (4.53)$$

En consecuencia, la reducción de $\max |S_{yp}(j\omega)|$ provocará un crecimiento del margen de módulo y viceversa.

Los valores típicos para un buen margen de módulo son [Lan02]:

$$\Delta M \geq 0.5 (-6dB) \quad [\text{mín} : 0.4 (-8dB)]$$

Calibración de la función de sensibilidad a la salida (S_{yp})

En [Lan02] se establece que para lograr robustez en el controlador, la función de sensibilidad a la salida (S_{yp}) debe estar limitada por dos márgenes de robustez; los cuales son:

- **Margen de ganancia** ΔG , el cual debe ser menor a 6 dB.

$$\Delta G < 6 \text{ dB} \tag{4.54}$$

- **Margen de retardo** $\Delta\tau$, el cual debe de encontrarse dentro de los siguientes límites:

$$\Delta\tau \rightarrow 1 - |1 - q^{-1}|^{-1} < |S_{yp}(q^{-1})| < 1 + |1 - q^{-1}|^{-1} \tag{4.55}$$

Para verificar más fácilmente que la función de sensibilidad a la salida se encuentra dentro de estos márgenes, se traza el bode de la ganancia de dicha función, junto con los márgenes de robustez.

De tal manera que al trazarse la gráfica de Bode correspondiente a la magnitud de la función de sensibilidad a la salida, dicha gráfica debe de estar contenida dentro de los límites mostrados en la Figura 4.10.

La herramienta desarrollada para el cálculo del controlador permite encontrar los polinomios $R(q^{-1})$, $S(q^{-1})$ y $T(q^{-1})$, verificar que el polinomio $S(q^{-1})$ sea estable y que la función de sensibilidad a la salida $S_{yp}(q^{-1})$ se encuentre dentro de los límites que garantizan robustez del controlador.

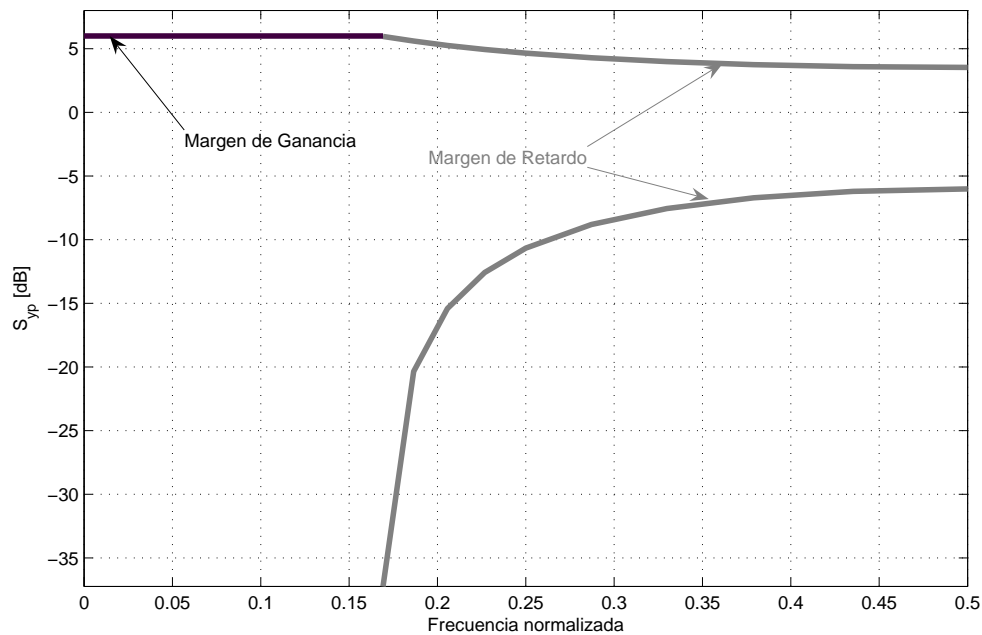


Figura 4.10: Márgenes de robustez.

Sí la función de sensibilidad a la salida no se encuentra dentro de los márgenes de robustez, se debe proceder a calcular nuevamente el controlador; modificando ya sea las partes fijas del controlador (H_R y H_S) o los polos auxiliares que forman parte del polinomio característico del sistema en lazo cerrado (P_F). Como se logra apreciar, el proceso de cálculo de un controlador robusto es iterativo y depende de las especificaciones determinadas por el diseñador.

Como resultado final se obtiene un controlador robusto basado en modelo, el cual puede ser utilizado para llevar a cabo un proceso de identificación en lazo cerrado con estructura tipo CLOE, tal como se propone en el presente trabajo.

4.5. Conclusiones del capítulo

Una de las ventajas de la identificación de sistemas en lazo cerrado con estructura tipo CLOE es que esta puede ser utilizada para calcular un controlador de orden menor. En este capítulo se describieron la forma de encontrar un controlador de orden reducido y un método para el cálculo de controladores robustos.

Existen dos formas de llevar a cabo la reducción del orden del controlador o regulador, una es la manera indirecta, la cual puede ser utilizada como un primer intento

para tratar de encontrar un controlador de orden menor al existente; la otra es de forma directa, que como se describió en el capítulo, consiste en la aplicación de los algoritmos CLIM y CLOM.

Debido a que para la identificación de sistemas en lazo cerrado es necesario contar con un controlador, en el presente capítulo también se describió una manera sencilla de calcular controladores robustos; la técnica consiste básicamente en resolver la ecuación de bezout, ecuación (4.38), y en observar que el resultado obtenido se encuentre dentro de ciertos márgenes. Los márgenes de robustez son aplicados, tal como se presentó, a la función de sensibilidad a la salida, S_{yp} . Esta manera de calcular un controlador está incluida dentro del toolbox de identificación desarrollado.

Los algoritmos CLIM y CLOM son derivados del algoritmo CLOE, ya que son el resultado de aplicar el algoritmo de adaptación paramétrica sobre el controlador en lugar de sobre la planta; de esta manera se estima directamente un controlador el cual se pretende sea de un orden menor al ya existente. En este caso el error de adaptación, para el ajuste de parámetros del controlador, proviene de la diferencia entre la señal de control real, $u(t)$, y la estimada, $\hat{u}(t)$.

Una característica especial que poseen los algoritmos CLIM y CLOM es que es posible trabajar con ellos utilizando la planta real, G , o la estimación de la misma, \hat{G} ; lo que significa que no sólo se puede calcular un controlador con datos provenientes de simulación, si no que también se pueden utilizar datos del sistema real, tal como se hace con el algoritmo CLOE. Como comentario final acerca de la reducción del orden de los controladores cabe mencionar que no siempre se podrá encontrar un regulador que posea un orden menor (directa o indirectamente).

Capítulo 5

Implementación y evaluación de los algoritmos

En este capítulo se presentan algunos resultados obtenidos al aplicar los algoritmos de identificación descritos en el presente trabajo. Los resultados corresponden a dos experimentos, uno de ellos implementado en simulación y el otro implementado experimentalmente en laboratorio.

El ejercicio implementado en laboratorio permite corroborar que se obtienen buenos resultados (reales) al aplicar un proceso de identificación en lazo cerrado con estructura tipo CLOE; mientras que el ejercicio simulado muestra como es posible llevar a cabo la reducción del orden del controlador, utilizando los algoritmos de identificación CLIM y CLOM.

5.1. Proceso de identificación en lazo cerrado

En el presente trabajo se propuso la siguiente metodología para llevar a cabo un proceso de identificación de sistemas en lazo cerrado, con estructura tipo CLOE.

1. Si el sistema no cuenta con controlador, elaborar un proceso de identificación en lazo abierto (ver [Lju99]).
2. Validar el modelo obtenido a través de la identificación en lazo abierto (ver [Lju99]) y calcular un controlador con base en modelo.
3. Realizar un proceso de identificación en lazo cerrado con estructura tipo CLOE.

4. Validar el modelo obtenido mediante la identificación en lazo cerrado (y determinar el mejor modelo estimado).
5. Calcular un nuevo controlador con base en el nuevo modelo, con lo cual se logra una posible reducción indirecta del controlador.
6. Si es posible, aplicar algoritmos de reducción directa del controlador.
7. Realizar una última validación empleando el modelo y controlador nuevos.
8. Si los resultados son satisfactorios se da por terminado el proceso; sí no, regresar a cualquiera de los pasos anteriores.

En las siguientes secciones se presentan los resultados obtenidos al implementar los algoritmos de identificación descritos en el presente trabajo.

5.2. Resultados en simulación

Como primera muestra de los resultados obtenidos, se presenta un ejercicio llevado a cabo en simulación, al cual se le agregó ruido mediante programación para simular una señal ocasionada por disturbios. A continuación se presenta una breve descripción del sistema simulado.

5.2.1. Descripción del sistema simulado

El sistema simulado fue tomado de [Alv01] y [CA00], el cual representa el ruido generado dentro de conductos de aire y el proceso de control llevado a cabo para reducir dichos ruidos. El sistema en cuestión se encuentra representado en la Figura 5.1.

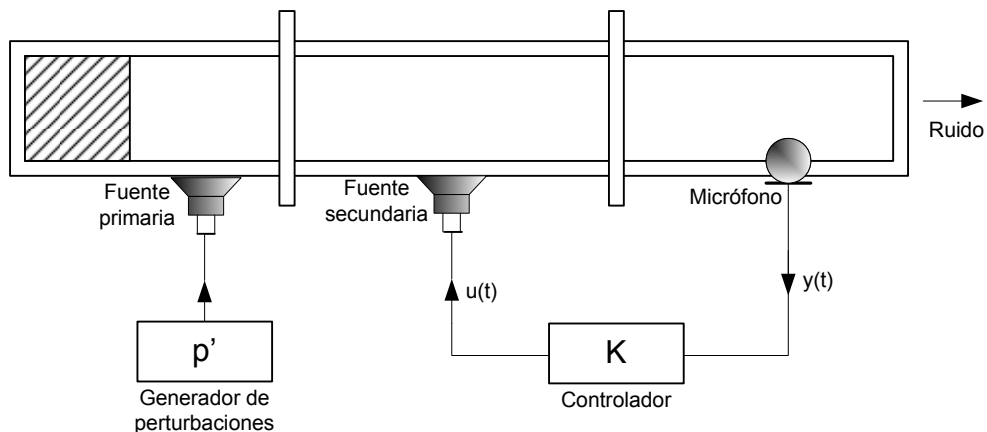


Figura 5.1: *Sistema simulado en lazo cerrado.*

El sistema presentado en la Figura 5.1 consta de un conducto dentro del cual se encuentran: una bocina para emitir perturbación (fuente primaria), una bocina que emite la señal de control (fuente secundaria) y un micrófono que registra la salida.

En [Alv01] se llevó a cabo un proceso de identificación (el tiempo de muestreo empleado fue $t_s = 0.0005s$), cuyo resultado final es el siguiente modelo discreto de la planta (modelo nominal):

$$\begin{aligned} \hat{A} &= 1 - 1.1519q^{-1} - 0.2933q^{-2} + 1.4923q^{-3} - 0.9141q^{-4} - 0.5514q^{-5} + 0.929q^{-6} - 0.2796q^{-7} \\ \hat{B} &= -0.0458q^{-1} - 0.052q^{-2} + 0.0691q^{-3} + 0.002q^{-4} - 0.0278q^{-5} + 0.0563q^{-6} + 0.0077q^{-7} - 0.0058q^{-8} + 0.0148q^{-9} - 0.0178q^{-10} \\ &\quad - 0.0111q^{-11} - 0.0138q^{-12} + 0.0391q^{-13} - 0.0311q^{-14} \\ d &= 6 \end{aligned}$$

La respuesta simulada del sistema ante un escalón unitario se muestra en la Figura 5.2, en dicha figura se observa que el sistema es estable y que se estabiliza en aproximadamente 0.03 segundos.

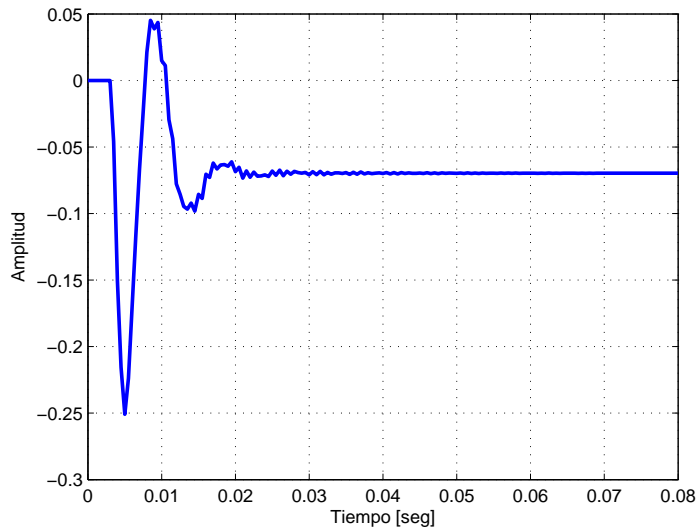


Figura 5.2: Respuesta ante un escalón unitario en lazo abierto.

Con base en el modelo identificado para la planta en [Alv01] se calcula un controlador, cuyos polinomios R y S son los siguientes:

$$\begin{aligned} R &= -0.9431 + 4.4204q^{-1} - 10.4224q^{-2} + 17.1513q^{-3} - 22.524q^{-4} + 25.4822q^{-5} - 25.9963q^{-6} + 23.4486q^{-7} - 16.6654q^{-8} + \\ &\quad 7.0964q^{-9} + 2.349q^{-10} - 11.0645q^{-11} + 18.6116q^{-12} - 23.8235q^{-13} + 25.788q^{-14} - 23.6954q^{-15} + 19.3039q^{-16} - \\ &\quad 15.0514q^{-17} + 9.8034q^{-18} - 3.9805q^{-19} + 0.679q^{-20} \\ S &= 1 - 3.4203q^{-1} + 6.0173q^{-2} - 8.1991q^{-3} + 10.269q^{-4} - 11.5669q^{-5} + 11.5657q^{-6} - 10.3809q^{-7} + 8.171q^{-8} - \\ &\quad 5.3274q^{-9} + 2.2144q^{-10} + 1.0742q^{-11} - 4.0345q^{-12} + 6.3407q^{-13} - 8.0371q^{-14} + 8.8828q^{-15} - 8.6876q^{-16} + \\ &\quad 7.7301q^{-17} - 6.172q^{-18} + 4.0854q^{-19} - 1.9412q^{-20} - 0.0702q^{-21} + 1.8683q^{-22} - 3.0285q^{-23} + 3.6301q^{-24} - \\ &\quad 3.8818q^{-24} + 3.5675q^{-26} - 2.9203q^{-27} + 2.285q^{-28} - 1.5882q^{-29} + 0.9727q^{-30} - 0.5787q^{-31} + 0.2868q^{-32} - \\ &\quad 0.0756q^{-33} \end{aligned}$$

En la Figura 5.3 se muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado ante una entrada tipo escalón unitario.

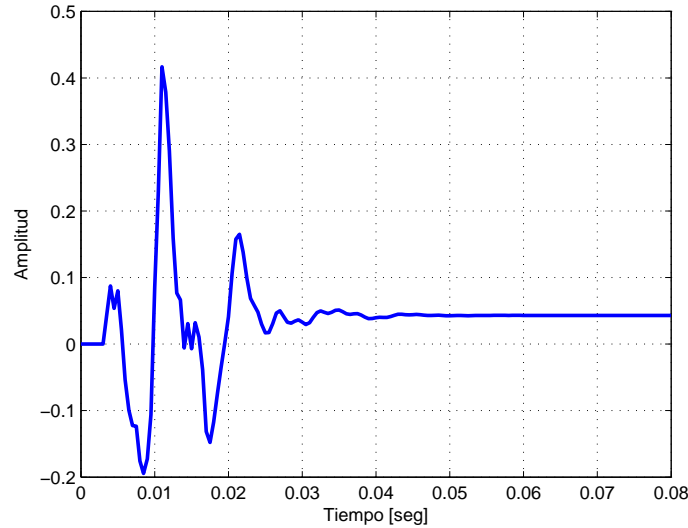


Figura 5.3: Respuesta en lazo cerrado ante un escalón unitario.

En la Figura 5.3 se logra apreciar que el sistema controlado se estabiliza en aproximadamente 0.45 segundos, este dato es de utilidad para la generación de la señal binaria pseudo aleatoria (SBPA).

5.2.2. Identificación en lazo cerrado

A continuación se procede a identificar el sistema en lazo cerrado, para ello se simuló el sistema descrito anteriormente (Figura 5.1). Como señal de referencia se utilizó una SBPA de 7 bits ($t_s = 0.0005$ segundos), a la salida generada por esta señal de referencia se le añadió ruido.

A la planta simulada sin ruido se le consideró como la planta o sistema “real” (modelo nominal), y a los modelos obtenidos empleando la señal de salida con ruido se les denominó modelos “estimados”.

Para este ejercicio se estimaron dos distintos modelos, a los que se denominaron: Modelo estimado [1] y Modelo estimado [2]. La característica principal de los modelos estimados es la siguiente:

Modelo estimado [1]: $n_A = 7$ y $n_B = 14$ (órdenes iguales al los del modelo nominal).

Modelo estimado [2]: $n_A = 6$ y $n_B = 13$.

En la Figura 5.4 se muestra la señal de referencia empleada (SBPA) y la salida obtenida, en lazo cerrado.

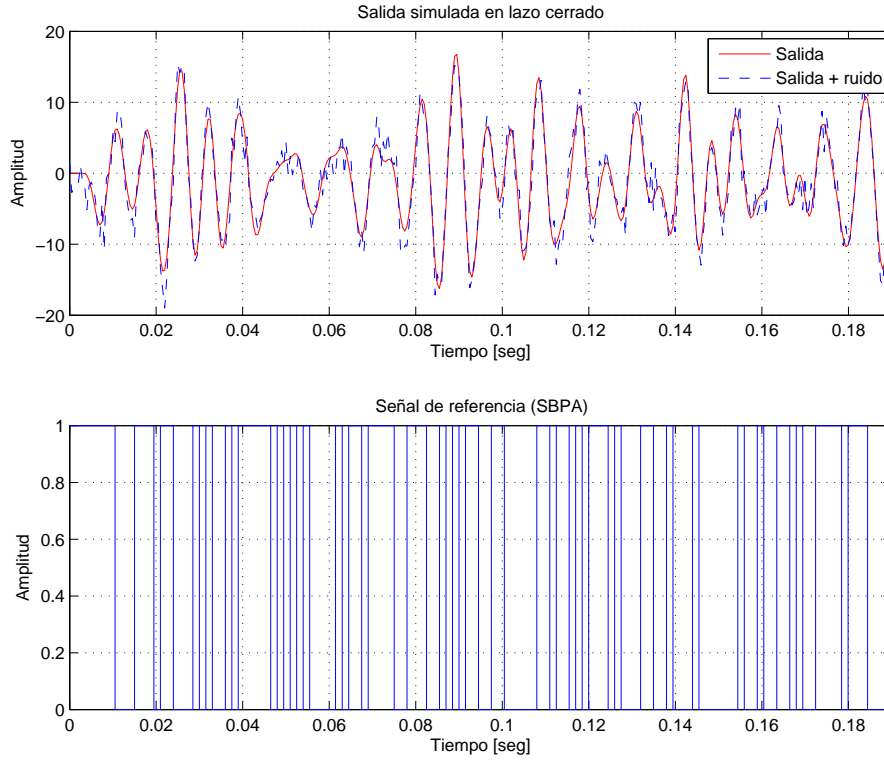


Figura 5.4: Datos de identificación en lazo cerrado.

Los modelos estimados fueron los siguientes:

Modelo estimado [1]

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= 1 - 1.281q^{-1} + 0.6272q^{-2} - 0.5057q^{-3} + 0.7406q^{-4} - 0.7271q^{-5} + 0.4763q^{-6} - 0.1018q^{-7} \\ \hat{B}_1 &= -0.0475q^{-1} - 0.0354q^{-2} + 0.0117q^{-3} + 0.0477q^{-4} + 0.0151q^{-5} - 0.0024q^{-6} + 0.0397q^{-7} - 0.0583q^{-8} + 0.0656q^{-9} - 0.0705q^{-10} \\ &\quad + 0.0726q^{-11} - 0.0896q^{-12} + 0.0704q^{-13} - 0.0348q^{-14} \\ d &= 6 \end{aligned}$$

Modelo estimado [2]

$$\begin{aligned} \hat{A}_2 &= 1 - 2.0825q^{-1} + 2.2722q^{-2} - 1.8624q^{-3} + 1.2726q^{-4} - 0.6687q^{-5} + 0.2296q^{-6} \\ \hat{B}_2 &= -0.041q^{-1} - 0.0251q^{-2} + 0.0632q^{-3} - 0.0405q^{-4} + 0.0402q^{-5} + 0.0169q^{-6} - 0.0573q^{-7} + 0.1006q^{-8} - 0.1241q^{-9} + 0.1005q^{-10} \\ &\quad - 0.1734q^{-11} + 0.1187q^{-12} - 0.0446q^{-13} \\ d &= 6 \end{aligned}$$

Según el procedimiento sugerido en la sección 5.1, después de obtener estos modelos estimados se debe proceder a validarlos, y determinar cual de ellos es el mejor. Para esto se utilizaron las técnicas descritas en el Capítulo 3.

5.2.3. Validación de los modelos estimados

Primeramente se realizó una validación en el dominio del tiempo, para ello se aplicaron señales de escalón e impulso unitario a los modelos (nominal y estimados) y se compararon. La Figura 5.5 muestra la comparación correspondiente al modelo estimado [1]; mientras que a su vez la Figura 5.6 muestra la comparación y error correspondientes al modelo estimado [2].

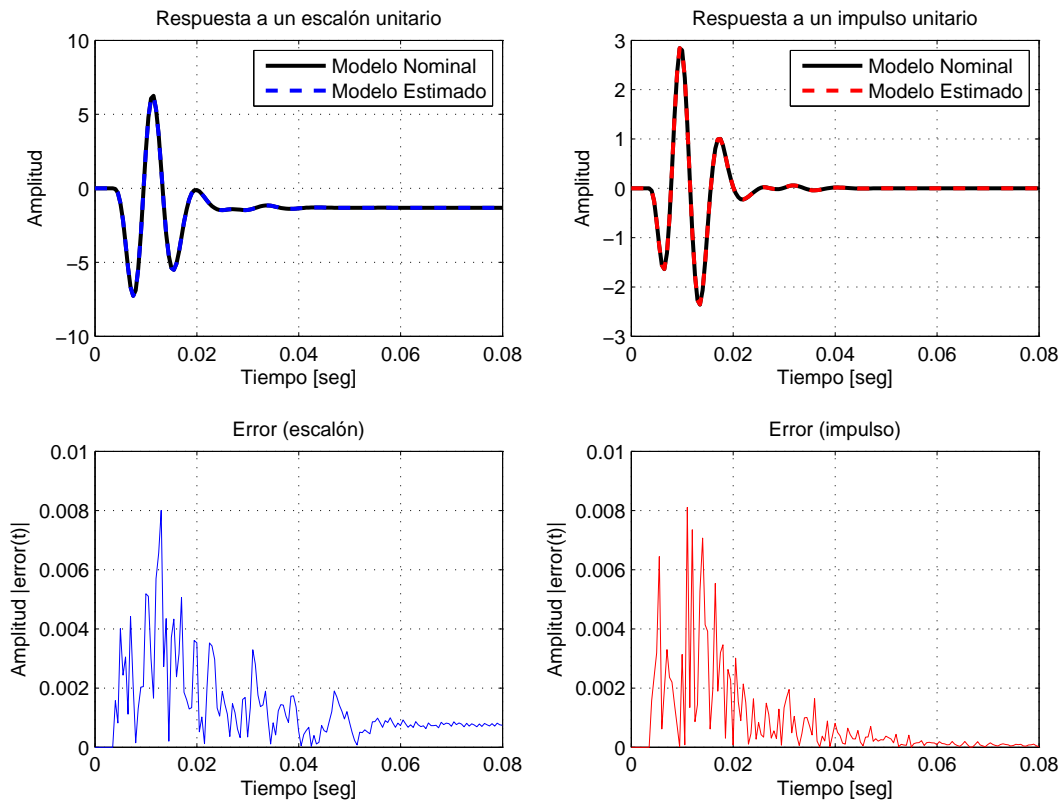


Figura 5.5: Comparación de respuestas temporales, modelos: nominal-estimado [1]

Al observar las Figuras 5.5 y 5.6 se logra apreciar que ambos modelos estimados dan buenos resultados, ya que las respuestas con respecto al modelo nominal están casi superpuestas. Sin embargo, al observar la magnitud del error entre las respuestas temporales, se logra apreciar que el error producido por la salida del modelo nominal y el modelo estimado [1] es menor en amplitud.

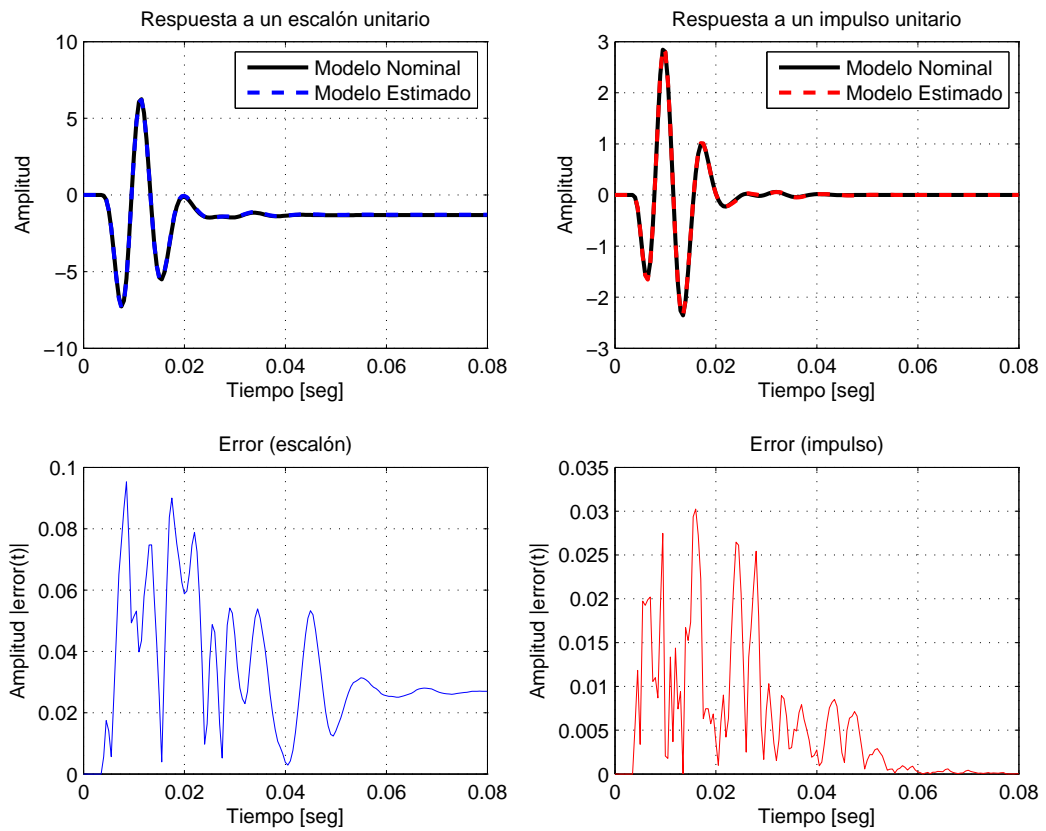


Figura 5.6: Comparación de respuestas temporales, modelos: nominal-estimado [2]

Para realizar una comparación un tanto más cuantitativa, se procedió a calcular los índices de desempeño para cada modelo estimado, con base en los errores obtenidos. Dicha comparación se encuentra representada en la Tabla 5.1¹.

Tabla 5.1: Índices de desempeño del sistema simulado.

		IAE	ITAE	ISE	ITSE	ISTSE	MSE	MCE
Escalón	ME [1]	0.23	17.25	0	0.04	2.96	0	0
	ME [2]	4.6	389.9	0.2	15.3	1369.3	0	0.04
Impulso	ME [1]	0.15	8.63	0	0.03	1.33	0	0
	ME [2]	0.85	55.71	0.01	0.69	44.9	0	0.01

Al inspeccionar la Tabla 5.1 se logra observar que el modelo estimado [1] presenta

¹ En la Tabla 5.1, ME = Modelo estimado.

los menores índices de desempeño, por lo que se considera mejor que el modelo estimado [2], en lo que a la validación en el dominio del tiempo se refiere.

Como siguiente paso de la validación se compararon los bodes (respuesta en frecuencia) del sistema nominal y los estimados (en lazo cerrado); así como también se compararon gráficamente los polos en lazo cerrado (Figuras 5.7 y 5.8).

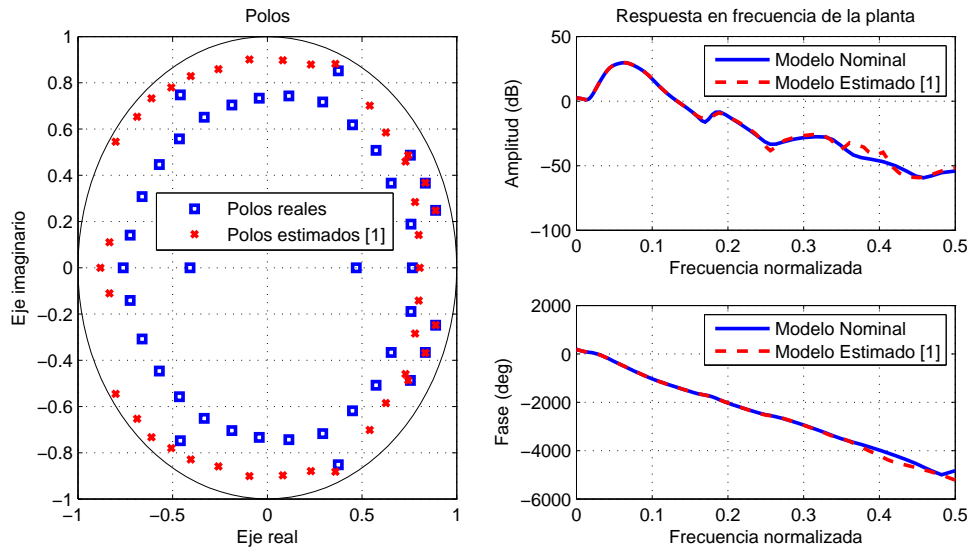


Figura 5.7: Cercanía de polos y respuesta en frecuencia en lazo cerrado [1]

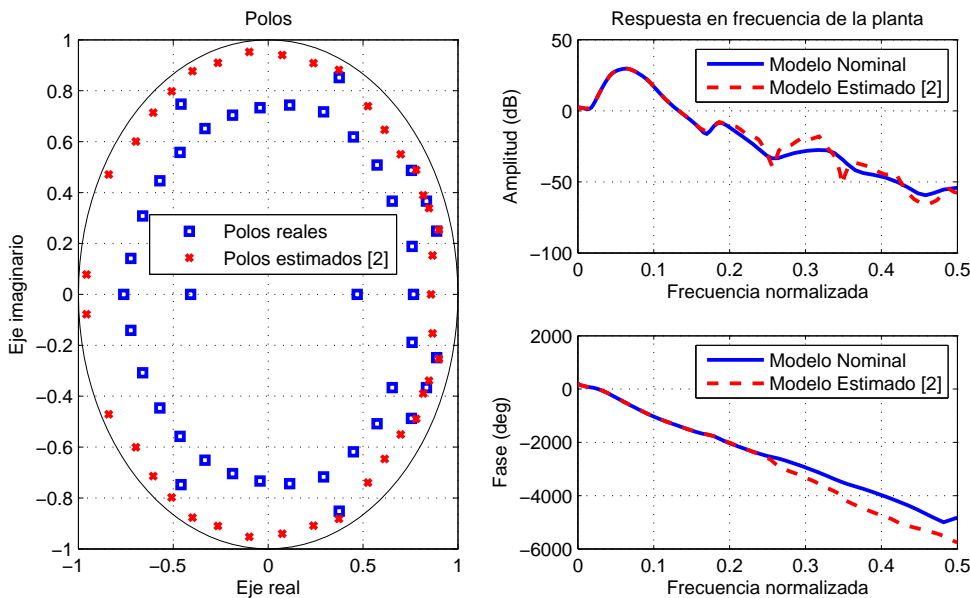


Figura 5.8: Cercanía de polos y respuesta en frecuencia en lazo cerrado [2]

Al ver las Figuras 5.7 y 5.8 se logra apreciar que ambos modelos estimados arrojan buenos resultados (respuestas parecidas en frecuencia y polos en lazo cerrado cercanos); sin embargo, el modelo estimado [1] posee una mayor similitud con el modelo nominal en lo referente a la respuesta en frecuencia (gráficas de Bode), tanto en amplitud como en frecuencia (Figura 5.7).

Por último se calculó la correlación cruzada entre el error de predicción a la salida, $\varepsilon_{LC}(t)$, y: la salida estimada del sistema en lazo cerrado, $\hat{y}(t)$, y la señal de control estimada, $\hat{u}(t)$. Esto se hizo tanto para el modelo estimado [1] y [2].

La Figura 5.9² muestra la correlación cruzada, entre las señales antes mencionadas, para el modelo estimado [1].

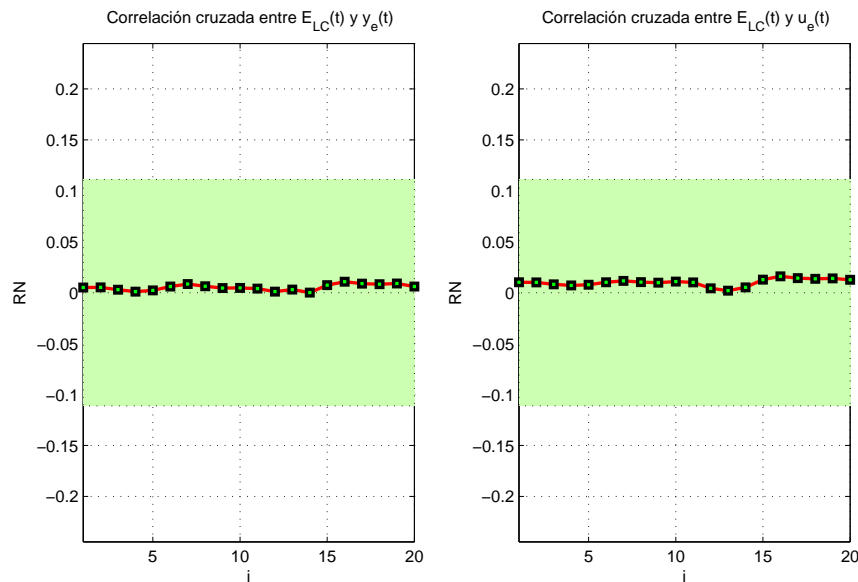


Figura 5.9: Correlación cruzada: $\varepsilon_{LC}(t)-\hat{y}(t)$, $\varepsilon_{LC}(t)-\hat{u}(t)$. Modelo estimado [1]

Al inspeccionar la Figura 5.9 se logra apreciar que todos los puntos se encuentran dentro de la zona sombreada, lo que corresponde a un nivel de confianza del 97% (criterio de validación empleado en el presente trabajo). Los valores máximos de correlación son: **0.0107** (correlación $\varepsilon_{LC}(t)-\hat{y}(t)$) y **0.016** (correlación $\varepsilon_{LC}(t)-\hat{u}(t)$).

A continuación, la Figura 5.10 algo similar a lo mostrado en la Figura 5.9, pero para el modelo estimado [2].

² En las Figuras 5.9 y 5.10, $E_{LC}(t)$ = error de predicción en lazo cerrado, $y_e(t)$ = salida estimada en lazo cerrado y $u_e(t)$ = señal de control estimada.

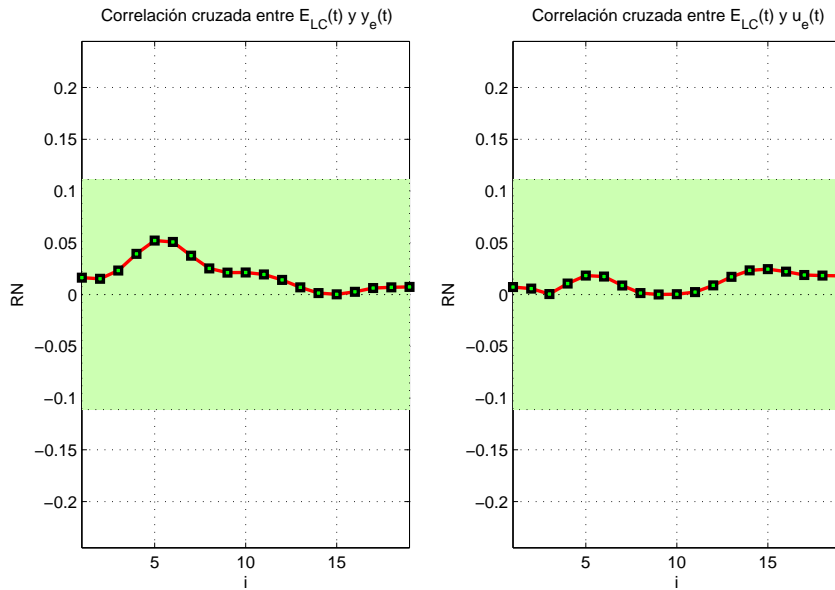


Figura 5.10: *Correlación cruzada: $\varepsilon_{LC}(t)-\hat{y}(t)$, $\varepsilon_{LC}(t)-\hat{u}(t)$. Modelo estimado [2]*

Al ver la Figura 5.10 también se aprecia que todos los puntos se encuentran dentro de la zona sombreada, con lo cual se cumple con la validación estadística. Los valores máximos de correlación son: **0.0521** (correlación $\varepsilon_{LC}(t)-\hat{y}(t)$) y **0.0245** (correlación $\varepsilon_{LC}(t)-\hat{u}(t)$).

Al comparar ambos modelos con respecto a los resultados obtenidos por la validación estadística, se observa que el modelo estimado [1] posee puntos de correlación menores (en magnitud).

Después de analizar los resultados de la validación, se observó que ambos modelos son buenos; sin embargo, el mejor es el modelo estimado [1]; se llegó a esta conclusión debido a que dicho modelo presentó la mayor similitud con el modelo nominal (“real”) en las respuestas temporales (escalón e impulso unitarios), lo que se puede apreciar al inspeccionar los índices de desempeño obtenidos y la magnitud del error (diferencia entre las salidas nominal y estimada), los cuales fueron menores; las respuesta en frecuencia (gráficas de Bode) son más parecidas y los puntos de correlación son menores en comparación con aquellos obtenidos con el modelo estimado [2].

El modelo estimado [1] es del mismo orden que el modelo nominal, por lo que no resultó posible reducir el orden del controlador de manera indirecta. De acuerdo con el procedimiento propuesto, el siguiente paso es tratar de reducir el orden del controlador empleando los algoritmos CLIM y CLOM.

5.2.4. Reducción del orden del controlador

Al sistema en lazo cerrado se le aplicaron los algoritmos CLIM y CLOM para intentar reducir el controlador de manera directa. Para lograr lo anterior se utilizó una herramienta diseñada para este fin (programa *reduc_rst.m*), la cual emplea los algoritmos CLIM y CLOM.

Se calculó la diferencia entre la respuesta del sistema con el controlador inicial y la respuesta del sistema con los controladores calculados de distintos órdenes, de $n = 2$ a $n = n_R$ para el polinomio $R_{reducido}$ y de $n = 2$ a $n = n_S$ para el polinomio $S_{reducido}$; también se calculó la distancia normalizada de Vinnicombe [Vin93] entre el controlador a reducir y los calculados (reducidos).

Con base en el error acumulado y la distancia de Vinnicombe se determina el nuevo controlador con el orden mínimo posible (si fue posible encontrarlo) que conserve una respuesta lo más aproximada al controlador inicial.

Para el ejemplo tratado (Figura 5.1) fue posible encontrar dos controladores de orden menor al inicial ($n_R = 20$, $n_S = 33$), dichos controladores son los siguientes:

CLIM: $n_R = 20$, $n_S = 21$

$$R_{CLIM} = -0.9431 + 2.1514q^{-1} - 2.7274q^{-2} + 1.9969q^{-3} - 0.1563q^{-4} - 0.7939q^{-5} + 0.8180q^{-6} - 0.5408q^{-7} + 1.2397q^{-8} - 1.4107q^{-9} + 1.7989q^{-10} - 1.8870q^{-11} + 1.0188q^{-12} - 0.6921q^{-13} - 0.9527q^{-14} + 1.3616q^{-15} - 0.2238q^{-16} - 0.6162q^{-17} + 0.1779q^{-18} + 0.1247q^{-19} - 0.3564q^{-20}$$

$$S_{CLIM} = 1 - 0.9776q^{-1} + 0.8837q^{-2} - 0.2631q^{-3} + 0.0757q^{-4} + 0.0678q^{-5} + 0.1052q^{-6} + 0.0715q^{-7} - 0.2225q^{-8} + 0.5606q^{-9} - 0.7369q^{-10} + 0.6809q^{-11} - 0.2214q^{-12} + 0.1678q^{-13} - 0.0687q^{-14} + 0.2358q^{-15} - 0.1696q^{-16} + 0.0435q^{-17} + 0.2534q^{-18} - 0.5084q^{-19} + 0.3322q^{-20} - 0.4288q^{-21}$$

CLOM: $n_R = 19$, $n_S = 19$

$$R_{CLOM} = -0.9431 + 2.7199q^{-1} - 3.7967q^{-2} + 2.9155q^{-3} - 0.1744q^{-4} - 2.0153q^{-5} + 2.3005q^{-6} - 1.3055q^{-7} + 1.0727q^{-8} - 1.1795q^{-9} + 1.3375q^{-10} - 1.4026q^{-11} + 0.8644q^{-12} - 0.6031q^{-13} - 0.5404q^{-14} + 1.8015q^{-15} - 1.2129q^{-16} - 0.4846q^{-17} + 0.9735q^{-18} - 0.5653q^{-19}$$

$$S_{CLOM} = 1 - 1.6565q^{-1} + 1.3519q^{-2} - 0.2192q^{-3} - 0.4945q^{-4} + 0.4514q^{-5} + 0.0738q^{-6} - 0.1814q^{-7} - 0.2234q^{-8} + 0.7505q^{-9} - 0.8802q^{-10} + 0.5375q^{-11} + 0.0216q^{-12} - 0.0016q^{-13} - 0.3661q^{-14} + 0.5077q^{-15} - 0.0996q^{-16} - 0.4698q^{-17} + 0.6698q^{-18} - 0.5043q^{-19}$$

En la Figura 5.11 se muestran las respuestas en lazo cerrado, ante una entrada tipo escalón unitario, del controlador inicial y los controladores calculados con los algoritmos CLIM y CLOM. En dicha figura se logra apreciar que el sistema en lazo cerrado, utilizando los controladores de orden reducido, posee respuestas similares a la correspondiente al controlador original.

Observando la Figura 5.11 no es posible distinguir claramente que salida en lazo cerrado (con los controladores de orden menor) se asemeja más a la salida en lazo cerrado obtenida con el controlador original; por tal motivo resulta conveniente comparar los índices de desempeño.

La Tabla 5.2 muestra los índices de desempeño obtenidos a partir de los dos controladores de orden reducido calculados, así como la distancia de normalizada de Vinnicombe.

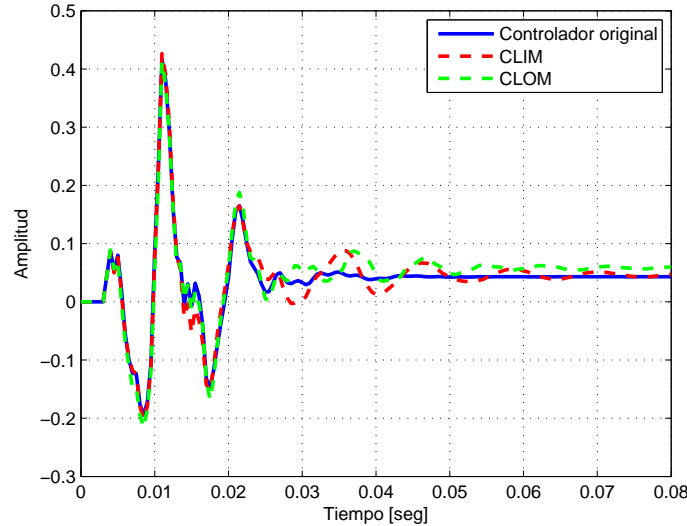


Figura 5.11: *Respuestas en lazo cerrado.*

Tabla 5.2: Índices de desempeño de los controladores.

Escalón 1 volt	IAE	ITAE	ISE	ITSE	ISTSE	MSE	MCE	Vinni
CLIM	1.77	124.09	0.04	2.43	175.75	0	0.02	0.0351
CLOM	2.24	198.38	0.04	3.73	388.77	0	0.02	0.1536

Al ver la Tabla 5.2 se aprecia que el controlador de orden reducido con el que se obtiene una respuesta, en lazo cerrado, de mayor similitud a la obtenida con el controlador original, es el controlador obtenido por el algoritmo CLIM.

Para validar los controladores obtenidos mediante un proceso de reducción (empleando los algoritmos CLIM y CLOM) se comparan las respuestas en frecuencia de los mismos con el controlador original. Esta comparación se muestra en la Figura 5.12.

En la dicha figura se muestran dos gráficas, en la izquierda se observa la respuesta en frecuencia del controlador original y el controlador reducido empleando el algoritmo CLIM, en la gráfica de la derecha se presenta algo similar pero empleando el algoritmo CLOM; en ambas gráficas se observa una gran similitud en la respuesta en frecuencia entre ambos controladores (reducidos) y el controlador original. La distancia normal-

zada de Vinnicombe se proporciona en la última columna de la Tabla 5.2 presentada anteriormente.

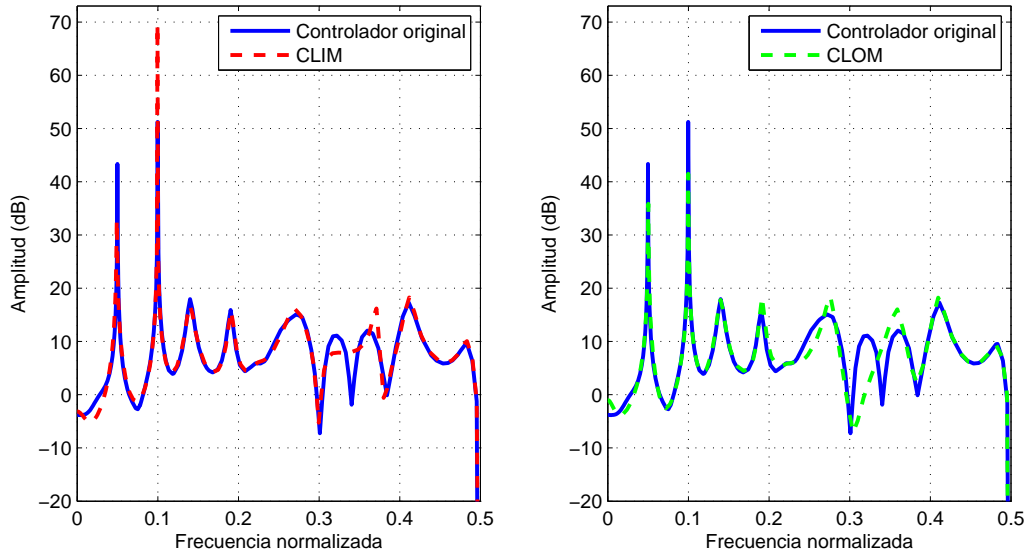


Figura 5.12: Comparación de la respuesta en frecuencia.

También se realizó la comparación de la función de sensibilidad a la salida (S_{yp}), entre aquella obtenida con el controlador original y las obtenidas con los controladores de orden reducido (CLIM y CLOM). Dicha comparación se muestra en la Figura 5.13.

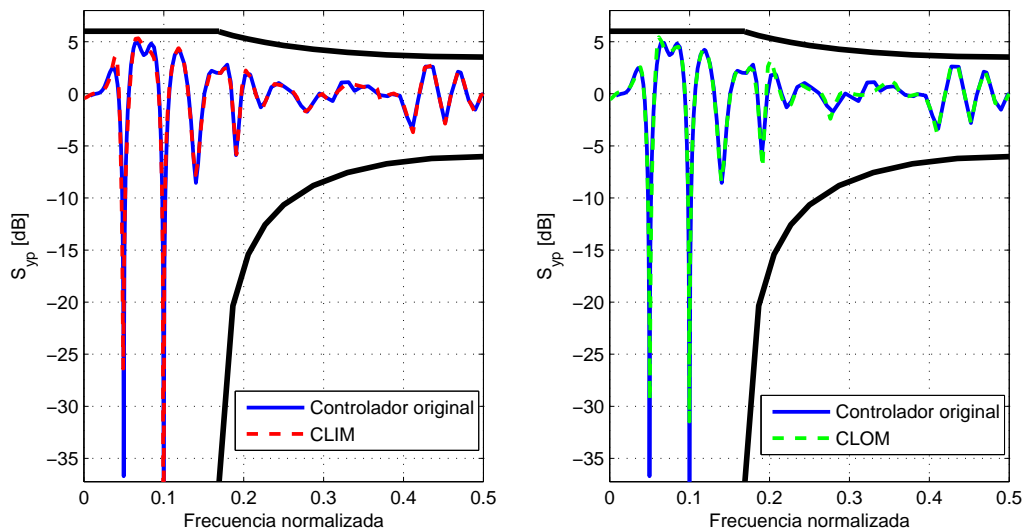


Figura 5.13: Comparación entre funciones de sensibilidad a la salida.

En la Figura 5.13 se observa que ambos controladores (de orden reducido) proporcionan funciones de sensibilidad (S_{yp}) similares a aquella obtenida con el controlador original. En la misma figura se observa también que ambos controladores, de orden reducido, cumplen con las especificaciones de robustez, ya que la respuesta en frecuencia de las respectivas $S_{yp}'s$ se encuentran dentro de los límites establecidos (presentados en el Capítulo 4).

En el cálculo de los reguladores de orden reducido se consideraron las siguientes partes fijas: $H_R = 1 + q^{-1}$, $H_S = 1$. El polinomio $H_R = 1 + q^{-1}$ generalmente es agregado en el cálculo de reguladores, debido a que es equivalente a abrir el lazo ante señales con frecuencias mayores a $1/2$ de la frecuencia de muestreo (filtra la señal). A lo anterior se le denomina en [Lan02] abrir el lazo.

A manera de conclusión se puede decir que ambos controladores de orden reducido obtenidos, son buenos candidatos para la sustitución del controlador original. Sin embargo el obtenido por el algoritmo CLIM resultó un tanto mejor, esto se concluyó al comparar los índices de desempeño y la distancia normalizada de Vinnicombe.

5.3. Resultados experimentales

Para enriquecer la evaluación de los algoritmos analizados y programados, se implementó en laboratorio una planta real (filtro de segundo orden). El propósito fue estimar un modelo para dicha planta y calcular un controlador robusto para la misma.

5.3.1. Descripción del sistema experimental

Se construyó un filtro pasa bajas (en laboratorio) para poder realizar pruebas reales de identificación en lazo cerrado empleando el algoritmo CLOE programado. El circuito electrónico construido se muestra en la Figura 5.14, el filtro tiene una frecuencia de corte de $f_c = 0.3386Hz$, y fue hecho a base de un amplificador operacional LM741.

La respuesta del filtro ante un escalón unitario (1 volt) se muestra en la Figura 5.15, en la cual se puede apreciar que el filtro oscila notablemente antes de estabilizarse; el tiempo de establecimiento es de aproximadamente 19 segundos, como se logra apreciar en la Figura 5.15.

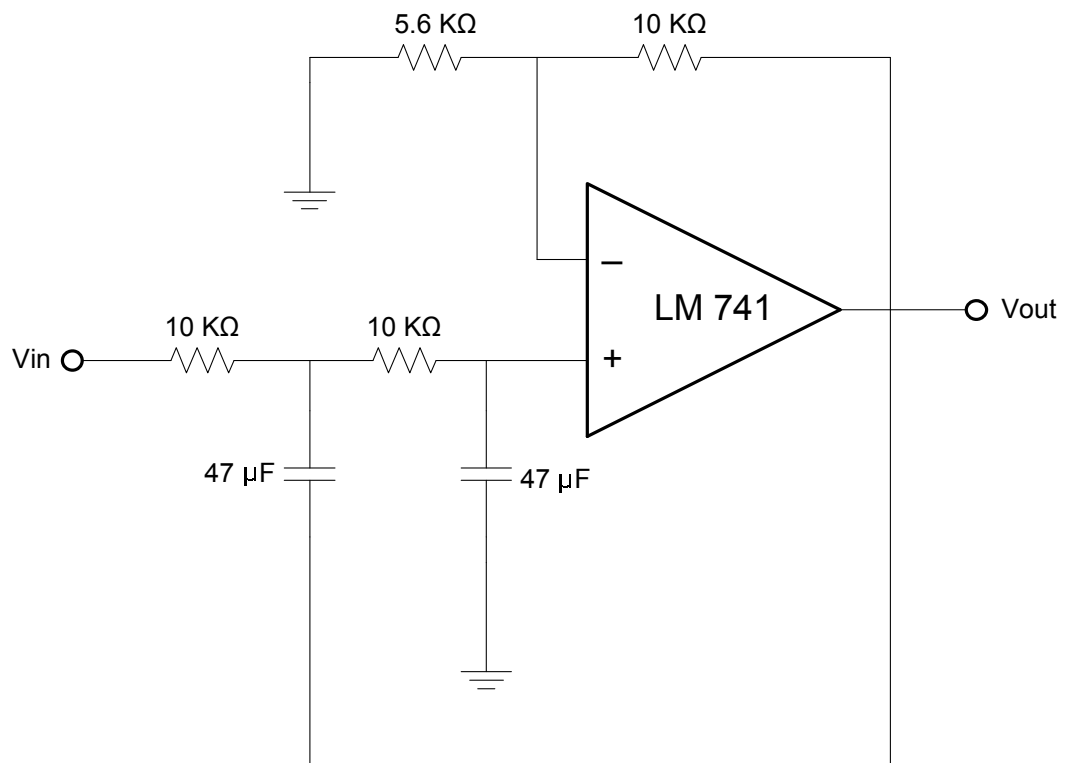


Figura 5.14: Filtro pasa bajas de segundo orden.

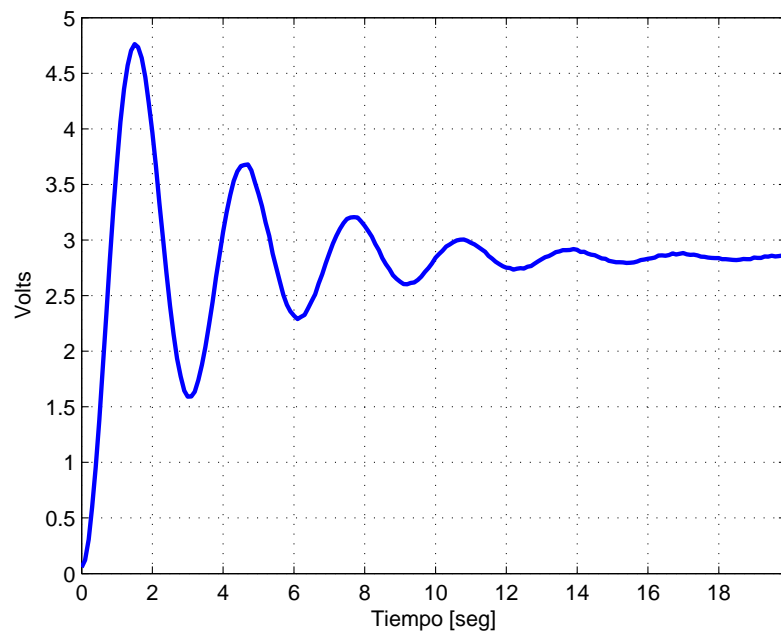


Figura 5.15: Respuesta del filtro ante un escalón unitario.

5.3.2. Identificación en lazo abierto

Como primera parte del experimento se realizó un proceso de identificación en lazo abierto, se utilizó el algoritmo OE y un tiempo de muestreo $t_s = 0.1\text{seg}$; la figura 5.16 muestra la salida del sistema real ante una señal SBPA de 10 bits con una frecuencia de reloj de $1/2 f_s$.

La señal de referencia empleada (SBPA) y la salida del filtro ante dicha referencia, se muestran en la Figura 5.16

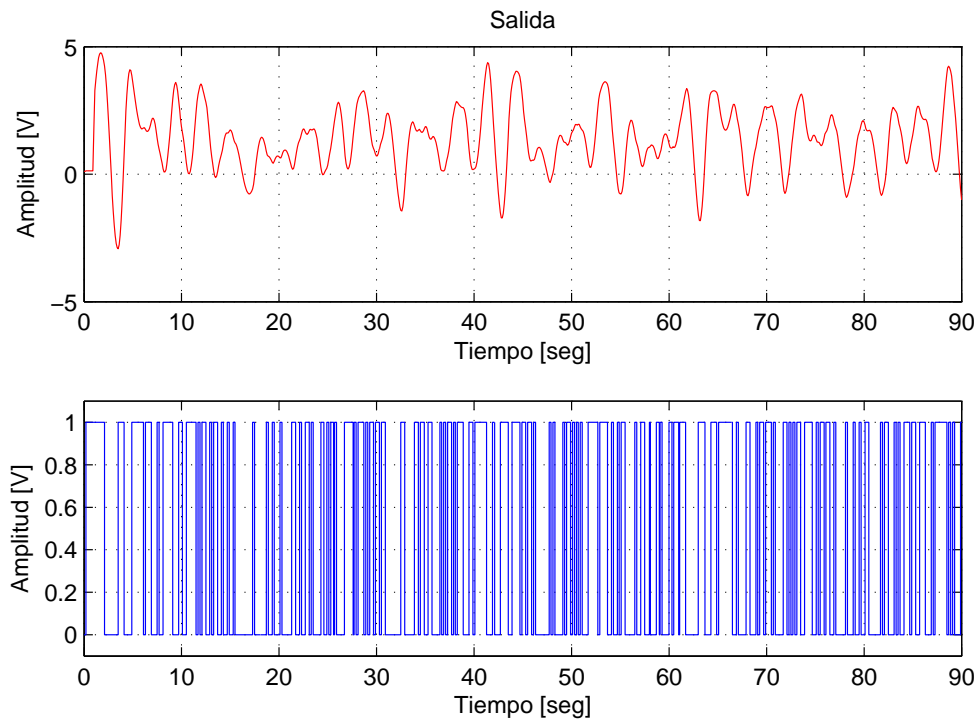


Figura 5.16: SBPA aplicada al filtro en lazo abierto.

La identificación en lazo abierto se llevó a cabo mediante el uso de las herramientas presentadas en [Lju99], utilizando el algoritmo OLOE (*Open Loop Output Error*). El resultado de la identificación en lazo abierto (elaborando la respectiva validación [Lju99]) fue el siguiente:

$$\hat{H}(q^{-1}) = \frac{0.07596q^{-1} + 0.04144q^{-2}}{1 - 1.907q^{-1} + 0.9483q^{-2}}$$

La Figura 5.17 muestra la comparación entre el sistema real (filtro implementado) y el sistema estimado, cuando se les aplica un escalón igual a 1 volt.

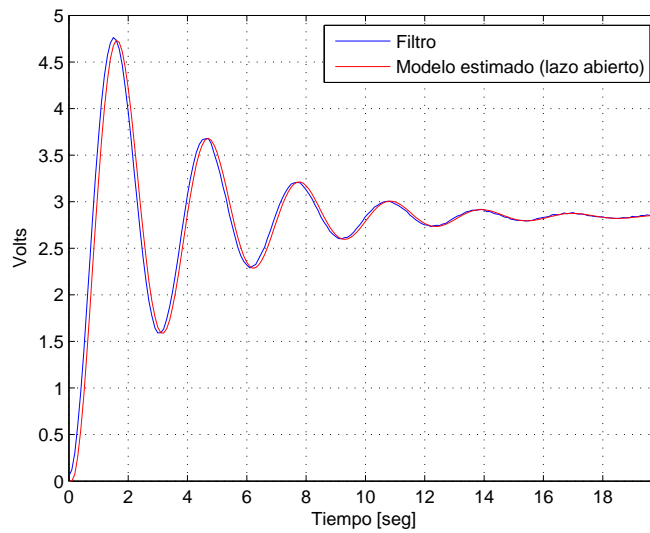


Figura 5.17: Comparación ante una entrada tipo escalón.

5.3.3. Cálculo del controlador

Con base en el modelo estimado, se diseñó un controlador RST de grado mínimo mediante la técnica de colocación de polos, descrita en el Capítulo 4; se supuso un polinomio característico deseado $P = 1 - 1.681q^{-1} + 0.7198q^{-2}$. Los polinomios R, S y T del controlador diseñado son:

$$R(q^{-1}) = 1.8697 - 1.9208q^{-1} \quad , \quad S(q^{-1}) = 1 + 0.0839q^{-1} \quad , \quad T(q^{-1}) = 0.3305$$

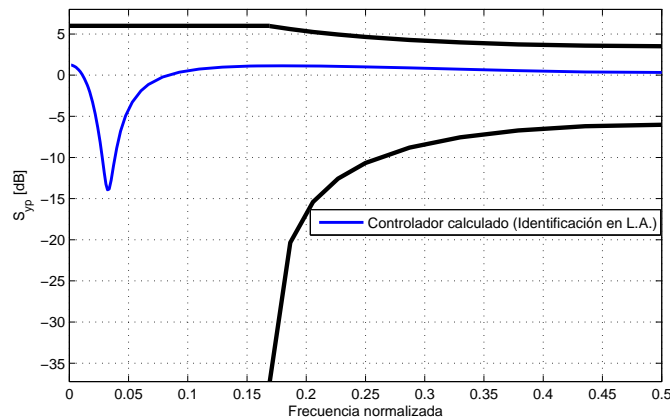


Figura 5.18: Función de sensibilidad a la salida.

En la Figura 5.18 se muestra la evaluación de la robustez del controlador calculado, dicha figura contiene la respuesta en frecuencia de la función de sensibilidad a la salida y los márgenes de robustez.

Mediante la Figura 5.18 se logra apreciar que el controlador diseñado es robusto, ya que la respuesta en frecuencia de la función de sensibilidad a la salida, S_{yp} , se encuentra dentro de los límites (márgenes de ganancia y retardo).

5.3.4. Identificación en lazo cerrado

El controlador calculado se aplicó al filtro y después se implementaron dos esquemas de identificación en lazo cerrado; los esquemas implementados fueron los presentados en las Figuras 2.1 (esquema 1, a cuyo resultado se le llamó CLOE1) y 4.2 (esquema 2, a cuyo resultado se le llamó CLOE2). Se empleó la misma señal SBPA utilizada para realizar la identificación en lazo abierto; la salida del filtro en lazo cerrado, para ambos esquemas de identificación, se muestra en la Figura 5.19.

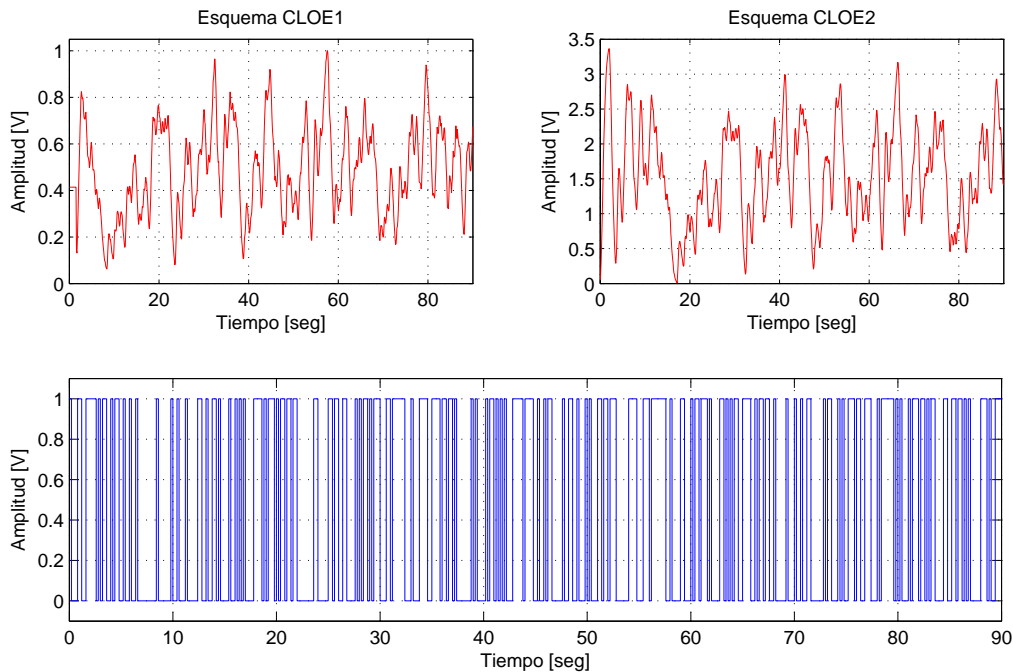


Figura 5.19: *Identificación en lazo cerrado.*

Los modelos estimados para cada uno de los esquemas de identificación en lazo cerrado (empleando el algoritmo CLOE) son, respectivamente:

$$\hat{H}_1(q^{-1}) = \frac{0.0812q^{-1} + 0.0422q^{-2}}{1 - 1.9088q^{-1} + 0.9501q^{-2}}$$

$$\hat{H}_2(q^{-1}) = \frac{0.0853q^{-1} + 0.0272q^{-2}}{1 - 1.9066q^{-1} + 0.9479q^{-2}}$$

El siguiente paso dentro del proceso de identificación en lazo cerrado es validar los modelos obtenidos, y determinar cual de ellos representa mejor al filtro real.

5.3.5. Validación de los modelos estimados

A continuación se presenta el proceso de validación aplicado a los modelos estimados (CLOE1 y CLOE2), la validación fue hecha en el dominio del tiempo, dominio de la frecuencia, cercanía de polos en lazo cerrado y estadística.

La Figura 5.20 muestra la comparación entre el sistema real (filtro implementado) y los sistemas estimados (empleando los dos esquemas de identificación), cuando se les aplica un escalón igual a 0.5 volts.

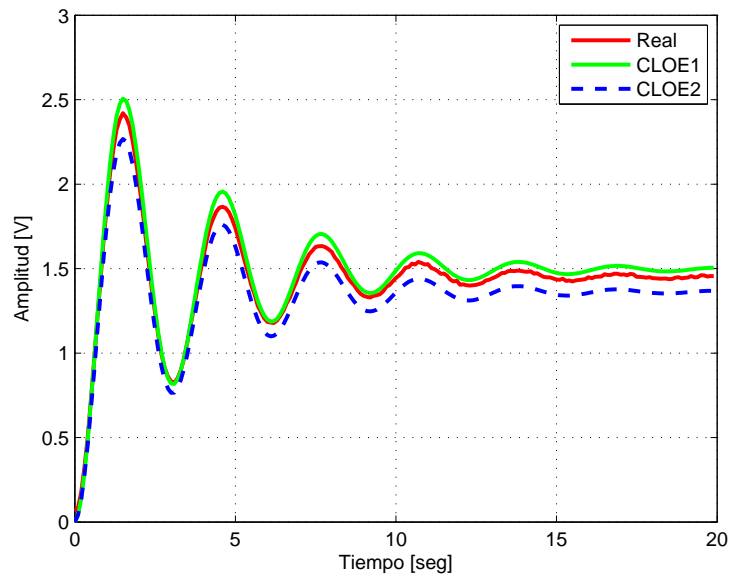


Figura 5.20: Comparación ante una entrada tipo escalón.

en la Figura 5.20 se logra apreciar que ambos modelos estimados siguen a la respuesta real, sin embargo la respuesta del modelo obtenido empleando el esquema 1 de identificación es mejor.

A continuación se presentan en la Tabla 5.3 los índices de desempeño para el sistema identificado en lazo abierto (OLOE) y los dos identificados en lazo cerrado (CLOE1 y CLOE2):

Tabla 5.3: Índices de desempeño en lazo abierto

		IAE	ITAE	ISE	ITSE	ISTSE	MSE	MCE
0.5 volts	OLOE	9.7	691.8	0.8	34.1	3082.3	0	0
	CLOE1	12.3	956	1.3	57.7	6065.3	0	0
	CLOE2	19	1812	2	180	21913	0	0

Para el sistema operando en lazo abierto y con base en la Tabla 5.3, los modelos más adecuados son el obtenido mediante identificación en lazo abierto (OLOE) y el obtenido mediante identificación en lazo cerrado empleando el esquema 1 (CLOE1), siendo el primero el que posee los índices de desempeño menores.

La Figura 5.21 muestra las respuestas en lazo cerrado del sistema real (filtro) y de los sistemas identificados en lazo abierto (OLOE) y lazo cerrado (CLOE1 y CLOE2), para dos entradas de tipo escalón, de 0.5 y 1 volts.

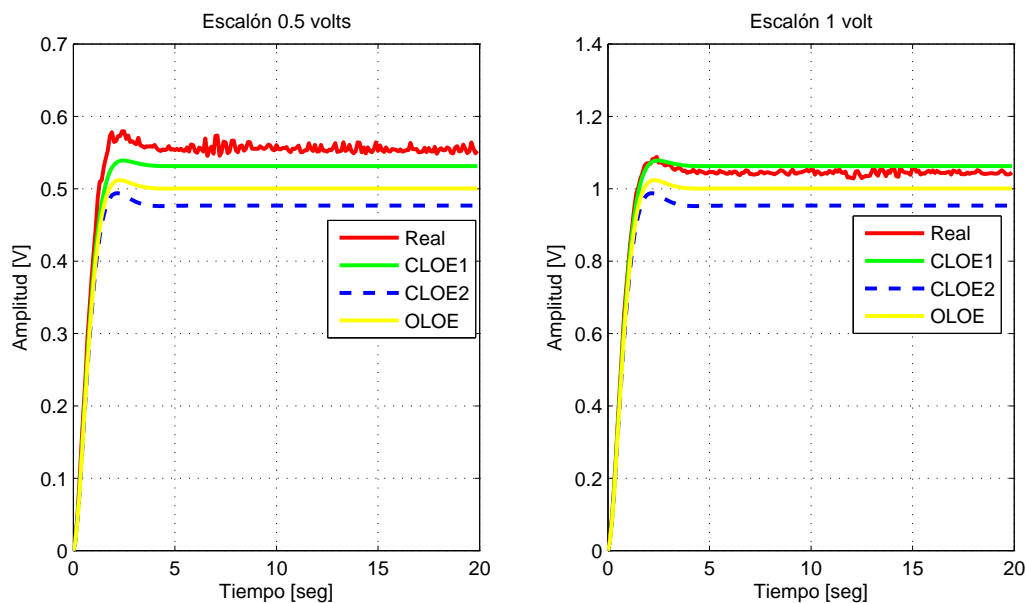


Figura 5.21: Comparación ante entradas de tipo escalón.

en la Figura 5.21 se logra apreciar claramente que el sistema identificado en lazo cerrado (empleando el esquema 1, CLOE1) es el que más se aproxima a la respuesta del sistema

real (**respuesta en lazo cerrado**). Los índices de desempeño calculados para cada uno de los sistemas se muestran en la Tabla 5.4.

Tabla 5.4: Índices de desempeño en lazo cerrado

		IAE	ITAE	ISE	ITSE	ISTSE	MSE	MCE
0.5 volts	OLOE	10.5	1083.1	0.6	59.5	7827.9	0	0
	CLOE1	4.9	474.4	0.1	11.8	1502.2	0	0
	CLOE2	15	1553	1	122	16142	0	0
1 volt	OLOE	8.8	871	0.4	39	5124	0	0
	CLOE1	3.79	355.04	0.11	7.24	955.18	0	0
	CLOE2	17	1809	2	166	22072	0	0

Al inspeccionar la Tabla 5.4 se logra apreciar que el mejor modelo es el obtenido mediante identificación en lazo cerrado CLOE1 (identificación empleando el esquema mostrado en la figura 4.1); de dicho modelo se deriva el error mostrado en la Figura 5.22, el cual posee una magnitud pequeña.

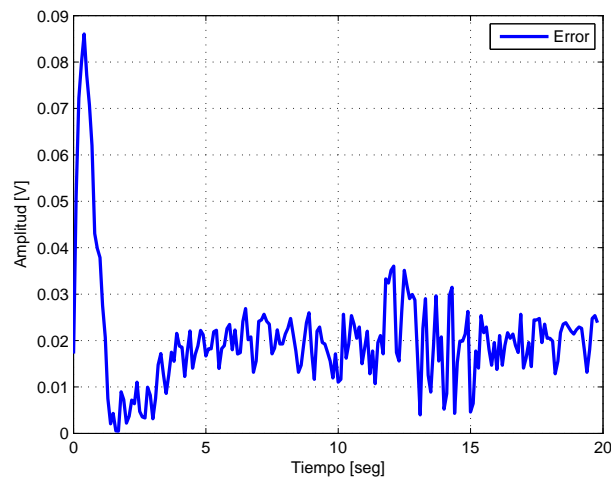


Figura 5.22: Error ante una entrada tipo escalón unitario.

Ahora se procede a validar el modelo estimado CLOE1, $\hat{H}_1(q^{-1})$, empleando las demás técnicas propuestas en el trabajo de tesis (programa *cloe.v.m*). La Figura 5.23 muestra la cercanía de polos y la respuesta en frecuencia de la planta real (controlador y filtro implementado) y el sistema estimado (controlador y modelo estimado CLOE1), ambos en lazo cerrado.

La función de transferencia de la que se consideró como planta real, se obtuvo después de un proceso de identificación en lazo abierto, considerando al filtro y al controlador como un sólo objeto (ver Figura 3.1).

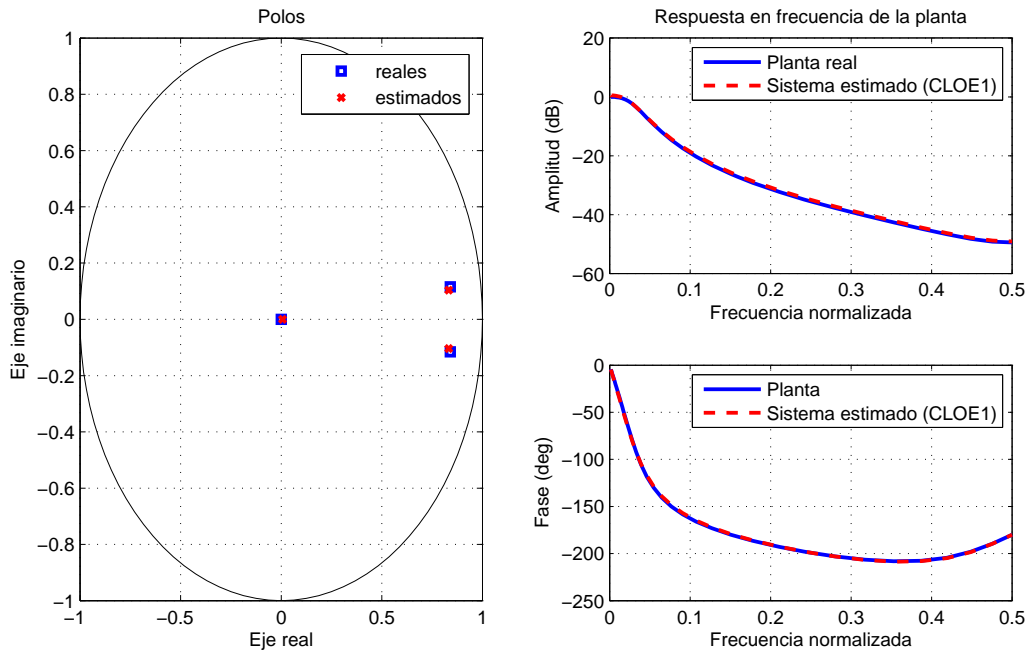


Figura 5.23: *Polos en lazo cerrado y respuesta en frecuencia.*

en la Figura 5.23 se logra apreciar que tanto los polos como los Bodes de amplitud y fase, del sistema “real” y estimado (con base en CLOE1), están casi superpuestos. **La distancia normalizada de Vinnicombe** fue **0.0298**. Con base en lo anterior se dice que el modelo estimado acreditó las pruebas de validación en frecuencia y cercanía de polos en lazo cerrado.

Después de lo anterior, y como último paso de la validación, se realizó la comprobación de la no correlación entre el $\varepsilon_{LC}(t)$ y las señales $\hat{y}(t)$ y $\hat{u}(t)$. La Figura 5.24³ muestra la correlación cruzada entre la salida estimada y el error en lazo cerrado.

En las gráficas mostradas en la Figura 5.24 se logra apreciar que todos los puntos se encuentran dentro de la franja sombreada, tanto para la correlación entre $\varepsilon_{LC}(t)$ - $\hat{y}(t)$, y entre $\varepsilon_{LC}(t)$ - $\hat{u}(t)$; lo cual representa un nivel de confianza del 97%. Finalmente, la covarianza del error de estimación en lazo cerrado fue: **0.0013**.

³ En la Figura 5.24, $E_{LC}(t)$ = error de predicción en lazo cerrado, $y_e(t)$ = salida estimada en lazo cerrado y $u_e(t)$ = señal de control estimada.

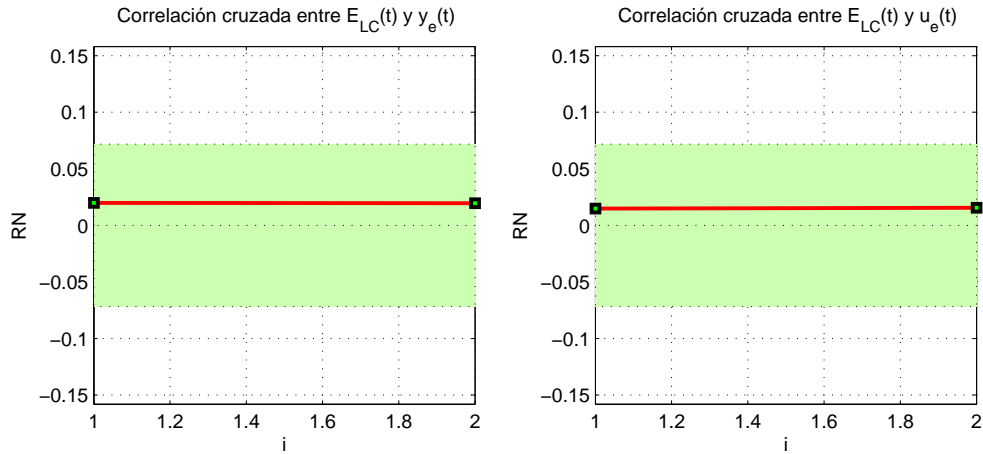


Figura 5.24: Correlación cruzada entre $\varepsilon_{LC}(t)-\hat{y}(t)$ y $\varepsilon_{LC}(t)-\hat{u}(t)$.

Como conclusión de todo el proceso de validación se determinó que el modelo estimado es correcto. Este nuevo modelo se considera como un reajuste del modelo con el cual se calculó el primer controlador (obtenido como resultado de un proceso de identificación en lazo abierto); por lo que el siguiente paso a seguir consistió en el cálculo de un nuevo controlador.

5.3.6. Cálculo del nuevo controlador

El modelo estimado $\hat{H}_1(q^{-1})$ (CLOE1) resultó ser mejor y pasó las pruebas de validación, este modelo se utilizó para calcular nuevamente un controlador con el fin de obtener una mejor respuesta en lazo cerrado. Lo anterior se refiere a que mediante la identificación en lazo cerrado, empleando el algoritmo CLOE, permite realizar un reajuste del modelo.

Empleando el nuevo modelo estimado del filtro se procede a recalcular el controlador, para lo anterior se emplea nuevamente la técnica de colocación de polos de grado mínimo. El polinomio característico deseado sigue siendo $P = 1 - 1.681q^{-1} + 0.7198q^{-2}$. Los polinomios R, S y T del nuevo controlador diseñado son:

$$R(q^{-1}) = 1.7966 - 1.8443q^{-1} \quad , \quad S(q^{-1}) = 1 + 0.0819q^{-1} \quad , \quad T(q^{-1}) = 0.3144$$

La Figura 5.25 muestra la evaluación de la robustez del nuevo controlador calculado, dicha figura contiene la respuesta en frecuencia de la función de sensibilidad a la salida y los márgenes de robustez.

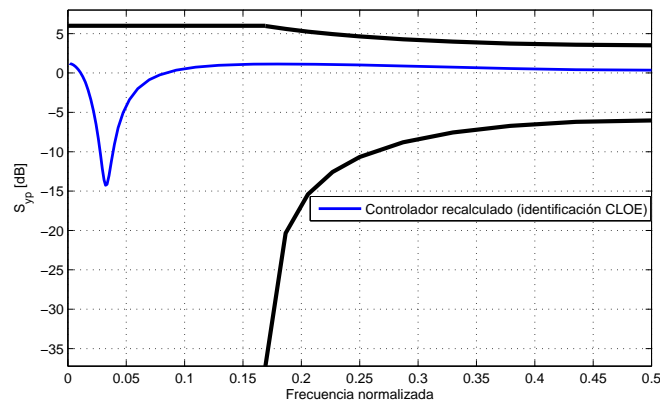


Figura 5.25: *Función de sensibilidad a la salida.*

Con ayuda de la Figura 5.25 se logra apreciar que el nuevo controlador diseñado es robusto, ya que la respuesta en frecuencia de la función de sensibilidad a la salida, S_{yp} , se encuentra dentro de los márgenes de ganancia y retardo.

5.3.7. Validación del sistema estimado con el nuevo controlador

Una vez que se calculó un nuevo controlador se procede a verificar si el conjunto controlador - modelo estimado, sigue siendo válido.

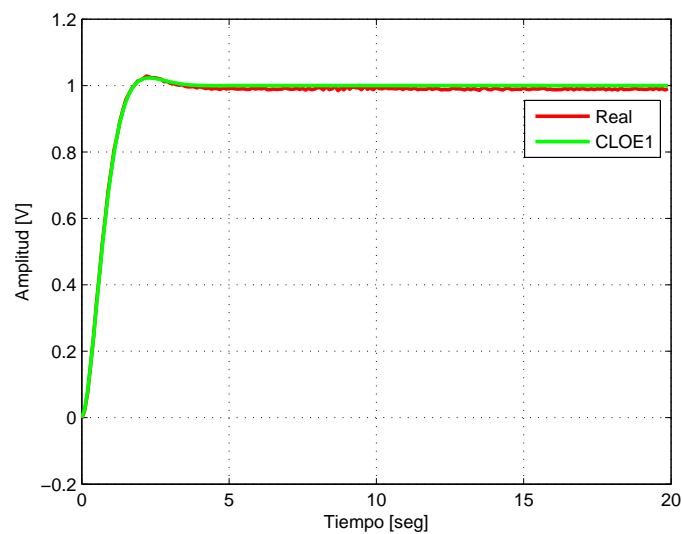


Figura 5.26: *Comparación ante entrada tipo escalón unitario en lazo cerrado.*

La comparación entre el sistema real en lazo cerrado (nuevo controlador y filtro implementado) y el nuevo sistema estimado también en lazo cerrado (nuevo controlador y modelo estimado), ante una entrada tipo escalón unitario, se muestra en la Figura 5.26.

En la Figura 5.26 se logra apreciar que el desempeño del nuevo controlador es mejor en comparación con el anterior (Figura 5.21), esto aplica tanto para el sistema real como para el estimado.

Los índices de desempeño calculados como resultado de la aplicación del nuevo controlador se muestran en la Tabla 5.5.

Tabla 5.5: Índices de desempeño en lazo cerrado (nuevo controlador).

Escalón 1 volt	IAE	ITAE	ISE	ITSE	ISTSE	MSE	MCE
CLOE1	2.59	200.69	0.08	2.47	291	0	0.02

Con base en la Tabla 5.5 se puede concluir que no sólo se obtuvo un mejor desempeño del controlador, si no que también los índices de desempeño que se obtuvieron a partir de éste resultaron ser menores en magnitud (ver Tablas 5.3, 5.4 y 5.5). El error derivado del empleo de este nuevo controlador se muestra en la Figura 5.27, el cual posee menor magnitud en comparación con el obtenido con el controlador anterior (Figura 5.22).

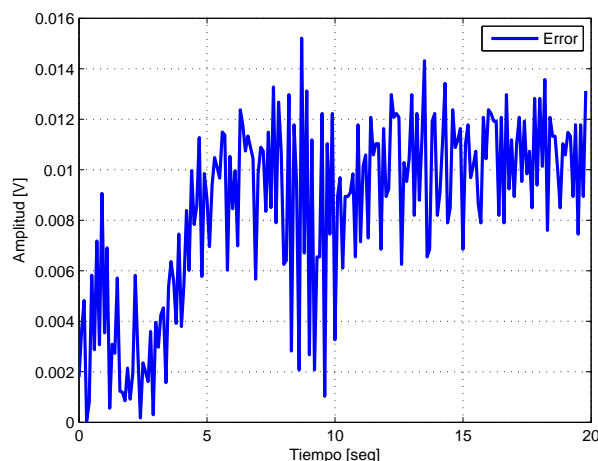


Figura 5.27: Error ante una entrada tipo escalón unitario.

A continuación se procede a aplicar las demás técnicas de validación. En las siguientes gráficas (Figura 5.28) se muestran la cercanía de polos y la respuesta en frecuencia

de la planta real (nuevo controlador y filtro implementado) y el sistema estimado (nuevo controlador y modelo estimado CLOE1).

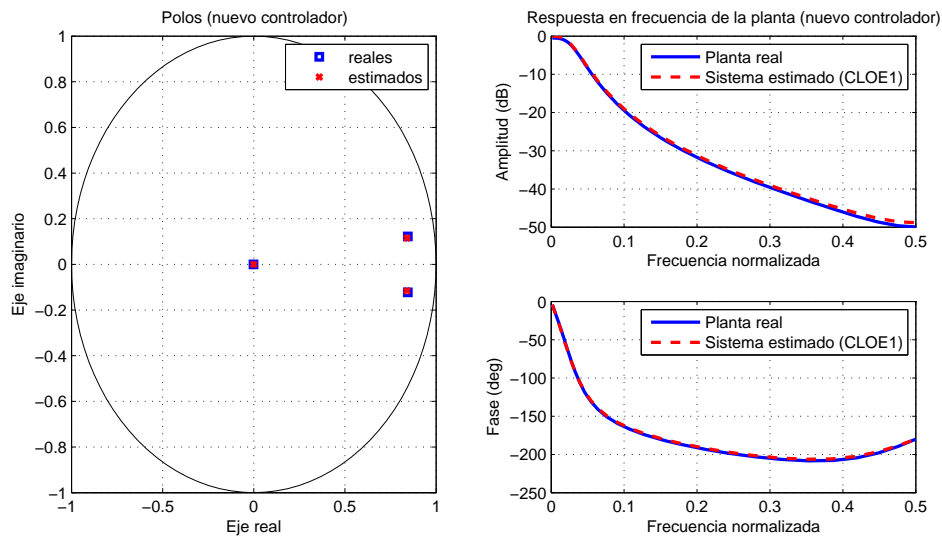


Figura 5.28: *Polos y respuesta en frecuencia.*

en la figura 5.28 se logra apreciar que tanto los polos como los Bodes de amplitud y fase, de la planta “real” y estimado (CLOE1), están casi superpuestos. **La distancia normalizada de Vinnicombe fue 0.0286**, esta distancia resultó menor que la obtenida anteriormente con el primer controlador calculado, aunque la diferencia no es significativa.

La Figura 5.29⁴ muestra la correlación cruzada entre la salida estimada y el error en lazo cerrado.

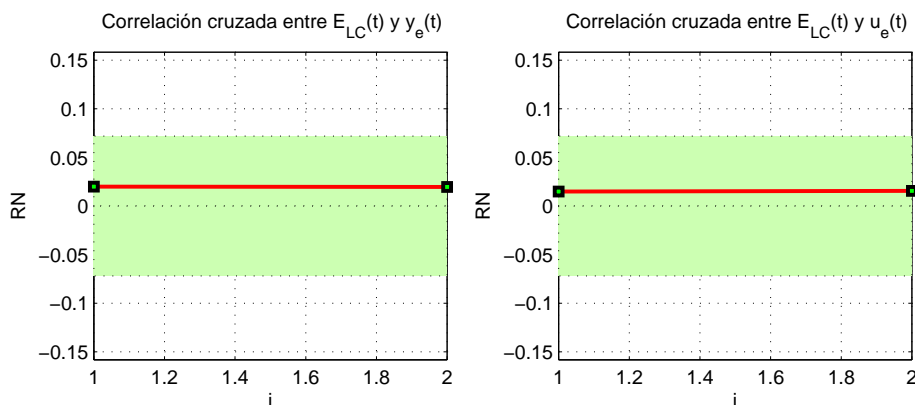


Figura 5.29: *Correlación cruzada entre la salida estimada y el error.*

⁴ En la Figura 5.24, $E_{LC}(t)$ = error de predicción en lazo cerrado, $y_e(t)$ = salida estimada en lazo cerrado y $u_e(t)$ = señal de control estimada.

se logra apreciar que todos los puntos se encuentran dentro de la franja sombreada, la cual representa un nivel de confianza del 97%. Finalmente, la covarianza entre la salida estimada y el error también fue: **0.0013**.

El orden del nuevo controlador es lo suficientemente pequeño (segundo orden) para lograr ser implementado en la práctica sin problema alguno; a su vez, los resultados obtenidos son satisfactorios, por lo que el proceso de identificación en lazo cerrado con estructura tipo CLOE se da por terminado.

Como se logró apreciar en las secciones del presente capítulo, los resultados fueron satisfactorios; tanto para la parte llevada a cabo en simulación como para la llevada a cabo de manera experimental.

Con lo que se concluye que la técnica de identificación de sistemas en lazo cerrado con estructura tipo CLOE resulta eficiente, permitiendo a su vez no sólo estimar un modelo de una planta o sistema, también proporcionar la posibilidad de reducir el orden del controlador.

5.4. Conclusiones del capítulo

En el presente capítulo se mostraron los resultados de los algoritmos de identificación con estructura tipo CLOE; se realizó estimación y ajuste de modelos, reducción del orden de los controladores y cálculo de los mismos.

Todos los resultados fueron obtenidos empleando el toolbox de identificación desarrollado y siguiendo el procedimiento de identificación en lazo cerrado propuesto. Con ello se comprobaron teórica y prácticamente los algoritmos tratados en el presente trabajo.

Con el ejemplo en simulación desarrollado se logró verificar el correcto funcionamiento de los algoritmos de identificación, tanto para estimar un modelo de la planta como para reducir el orden del controlador.

La riqueza del ejemplo simulado, tomado de [Alv01], permitió realizar un proceso completo de identificación de sistemas con estructura tipo CLOE. En primera instancia se obtuvieron dos modelos estimados que pasaron todas las técnicas de validación, propuestas en el presente trabajo, y empleando los resultados de la mismas técnicas se pudo discernir entre ambos modelos estimados, considerándose como mejor el denominado: Modelo estimado [1].

La reducción del orden de los controladores se demostró con el ejemplo simulado, ya que en práctica resultó difícil encontrar un sistema que requiera un controlador de un orden similar al presentado en dicho ejemplo.

Aun cuando el ejemplo simulado pudo resultar suficiente, resultó interesante corroborar en la práctica el correcto funcionamiento de los algoritmos, para lo cual se implementó el filtro de segundo orden mostrado en el presente capítulo. Con el cual se llevó a cabo un proceso de identificación en lazo cerrado, obteniéndose buenos resultados que fueron desde la estimación y reajuste del modelo del filtro hasta el diseño y ajuste de un controlador robusto (mediante colocación de polos y calibración de la función de sensibilidad a la salida).

Al final se obtuvo un modelo estimado que representó al filtro (sistema) operando en lazo cerrado y un controlador eficiente y de orden pequeño.

También se constató que la identificación de sistemas en lazo cerrado, con estructura tipo CLOE, no sólo es conveniente ó posible llevarla a cabo cuando la identificación en lazo abierto no puede realizarse; también resulta conveniente aprovechar las ventajas de la misma aun cuando se pueda llevar a cabo un proceso de identificación en lazo abierto. Lo anterior se corroboró en el ejercicio experimental (filtro de segundo orden implementado).

Capítulo 6

Observaciones y conclusiones generales

En este último capítulo se presentan las observaciones y conclusiones generales derivadas del trabajo de investigación realizado; el cual se presentó en este documento de tesis.

A su vez también se hace una breve descripción de trabajos futuros que se considera se pueden desarrollar a partir de los resultados y observaciones que se obtuvieron en la realización del presente trabajo.

6.1. Conclusiones generales

En el presente trabajo se realizó un estudio y análisis de los diferentes algoritmos existentes para llevar a cabo un proceso de identificación de sistemas en lazo cerrado con estructura tipo CLOE; se describieron diferentes técnicas para validar modelos estimados, obtenidos después de un proceso de identificación en lazo cerrado; se hizo un análisis del algoritmo recursivo de mínimos cuadrados, cuando es empleado como algoritmo de adaptación paramétrica, este análisis incluyó convergencia a parámetros (ambientes estocástico y determinístico) y estabilidad y robustez de dicho algoritmo; se describió la manera en la que la identificación de sistemas en lazo cerrado (con la estructura mencionada) puede ser empleada para llevar a cabo una reducción del orden de los controladores; y se describió una técnica para el cálculo de controladores robustos.

El análisis de todo esto hizo posible el desarrollo de una herramienta de identificación, en lazo cerrado, capaz de realizar la estimación y reajuste de modelos, reducción del orden de los controladores y cálculo de los mismos. Dicha herramienta se elaboró en

forma de toolbox y está disponible en MatLab[®] y SciLab[®].

Con el objetivo de mostrar una evaluación de los algoritmos de identificación, que se describieron a lo largo del documento, se incluyeron resultados obtenidos en simulación y de manera experimental (filtro de segundo orden implementado en laboratorio). Los resultados obtenidos a partir de estos ejercicios fueron correctos, con lo que se mostró el correcto funcionamiento de los algoritmos de identificación.

En el Capítulo 2 se presentó el análisis y la descripción de la identificación de sistemas en lazo cerrado con estructura tipo CLOE, en dicho capítulo se mostró el esquema en lazo cerrado considerado (Figura 2.1), este esquema fue planteado debido a su generalidad, ya un gran número de controladores existentes (basados en modelo) pueden ser representados en un esquema RST, el cual posee una etapa de prealimentación y otra de retroalimentación. Se observó que de este esquema se pueden derivar algoritmos de identificación, en lazo cerrado, que utilizan la diferencia entre la salida real y la estimada (error de salida) como dato de entrada para el algoritmo de adaptación paramétrica; de ahí se obtienen los algoritmos de identificación con estructura tipo CLOE (Closed Loop Output Error - *error a la salida en lazo cerrado*).

Para la adaptación paramétrica se utilizó el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados, el cual resultó ser suficientemente eficiente para el cálculo de los parámetros estimados de la función de transferencia del sistema. Dicho algoritmo tiende asintóticamente a los parámetros reales cuando se hace una buena selección del orden del sistema, además se comprobó su estabilidad y robustez ante parte de la dinámica no modelada de la planta o sistema real.

Los algoritmos con estructura tipo CLOE que fueron analizados son los siguientes:

CLOE *Closed Loop Output Error.*

F-CLOE *Filtered Closed Loop Output Error (CLOE filtrado).*

AF-CLOE *Adaptive Filtered Closed Loop Output Error (CLOE filtrado-adaptable).*

X-CLOE *Extended Closed Loop Output Error (CLOE extendido).*

G-CLOE *Generalized Closed Loop Output Error (CLOE generalizado).*

En la práctica se observó que todos estos algoritmos presentan resultados similares, no existe una diferencia significativa en la respuesta de una planta estimada con uno u otro algoritmo; por tal motivo se concluyó que no era necesario incluir en las funciones programadas a cada uno de los algoritmos.

En la Tabla 6.1 se presentan algunas características principales de los algoritmos de identificación listados anteriormente, estas características corresponden al criterio

de selección empleado para determinar que algoritmo resulta mejor, de acuerdo a las consideraciones prácticas que se establecieron en este trabajo (sección 1.10).

Tabla 6.1: Características de los algoritmos.

<i>Algoritmo</i>	<i>Características</i>
CLOE	No presenta <i>bias</i> . No requiere una estimación a priori de la planta.
F-CLOE	No presenta <i>bias</i> . Requiere de una estimación a priori de la planta.
AF-CLOE	No presenta <i>bias</i> . Requiere de una estimación a priori de la planta.
X-CLOE	Puede presentar <i>bias</i> . No requiere de una estimación a priori de la planta. Se necesita establecer una dinámica al ruido.
G-CLOE	Puede presentar <i>bias</i> . No requiere de una estimación a priori de la planta. Se necesita establecer una dinámica al ruido.

Como resultado de la inspección de la Tabla 6.1 se concluyó que el algoritmo que resulta mejor es el CLOE. Los algoritmos X-CLOE y G-CLOE presentan bias en sus resultados, además de requerir el establecimiento de una dinámica al ruido; mientras que los algoritmos F-CLOE y AF-CLOE requieren de una primera estimación a priori de la planta a identificar. Cabe resaltar que esta selección se debió a las consideraciones hechas desde un principio, en la sección 1.10, para el desarrollo del trabajo.

Después de realizar el estudio y análisis de los algoritmos de identificación en lazo cerrado, y de la descripción del algoritmo de adaptación paramétrica, así como la de sus propiedades, el siguiente paso fue el de describir técnicas de validación de modelos estimados.

Las técnicas de validación sirven para dos propósitos, el primero es el de establecer si el modelo estimado representa correctamente a la dinámica del sistema real (esto de acuerdo con las necesidades del usuario), el segundo es el de ayudar a seleccionar entre un conjunto de modelos estimados (si se cuentan con varios) cual es el que representa mejor a la planta real o cual es el más conveniente. Las técnicas de validación que se propusieron (las cuales se mostraron en el Capítulo 3) son: validación en el dominio del tiempo, validación en el dominio de la frecuencia, validación por cercanía de polos en lazo cerrado y validación estadística. Las cuales sirven para los dos propósitos descritos anteriormente.

Durante el desarrollo del trabajo se observó que las técnicas de validación que tienen más peso son las correspondientes al dominio de la frecuencia (gráficas de Bode) y la cercanía de polos, ya que una vez que se verifican éstas se asegura una buena similitud de las respuestas temporales (validación en el dominio del tiempo). El único inconveniente que se encontró a las técnicas de validación basadas en las gráficas de Bode y de polos en lazo cerrado, es el de requerir de un buen resultado en el proceso de identificación en lazo abierto de todo el sistema “real” (Figura 3.1). Aun así la teoría y herramientas existentes en lo referente a la identificación en lazo abierto permiten por lo general conseguir buenos resultados [Lju99].

Todas las técnicas de validación que se propusieron fueron implementadas en cada uno de los ejemplos que se desarrollaron a lo largo de la realización del trabajo de investigación, tanto en simulación como de manera experimental. Con ellas se logró, valga la redundancia, validar correctamente un modelo estimado, así como discernir entre modelos, que se obtuvieron después de un proceso de identificación en lazo cerrado.

Más adelante, después de presentar la teoría referente a los algoritmos de identificación de sistemas en lazo cerrado con estructura tipo CLOE, y de proponer diferentes técnicas para la validación de modelos estimados; se describió la manera en que este tipo de identificación puede ser empleada para reducir el orden de los controladores. Se observó que estos pueden ser reducidos de dos formas diferentes: indirecta y directamente.

La manera indirecta de reducir el orden de un controlador es estimando un modelo de menor orden, con lo que se puede calcular otro controlador, con base en este nuevo modelo. En la práctica se observó que esta manera de reducir el orden del controlador no es del todo segura, ya que no siempre se podrá calcular un controlador de orden reducido cuando se utiliza el nuevo modelo; sin embargo es útil intentar reducir el orden del controlador de esta forma como primer intento.

En el documento se manejó que la reducción directa consiste en estimar directamente un controlador de orden reducido, empleando el algoritmo de identificación CLOE con ciertas modificaciones, mismas que dieron como resultado a los algoritmos CLIM y CLOM. Empleando estos algoritmos se logró reducir controladores de manera fácil y práctica, de tal forma que se reduce el tiempo de cálculo al no tener que realizar otro proceso de diseño. A dichos algoritmos se les pueden agregar partes fijas del controlador, para que el controlador de orden reducido calculado posea o conserve las características que el usuario desea. Cabe mencionar que no siempre será posible reducir el orden del controlador o regulador (directa o indirectamente).

Como se pudo constatar al observar algunos de los resultados obtenidos, que se presentaron en el Capítulo 6, la identificación de sistemas en lazo cerrado con estruc-

tura tipo CLOE es una herramienta poderosa, al permitir la estimación y reajuste de modelos, así como el cálculo y reducción del orden de los controladores; con ella se pudo proponer un procedimiento completo de identificación, el cual se muestra a continuación en la Figura 6.1.

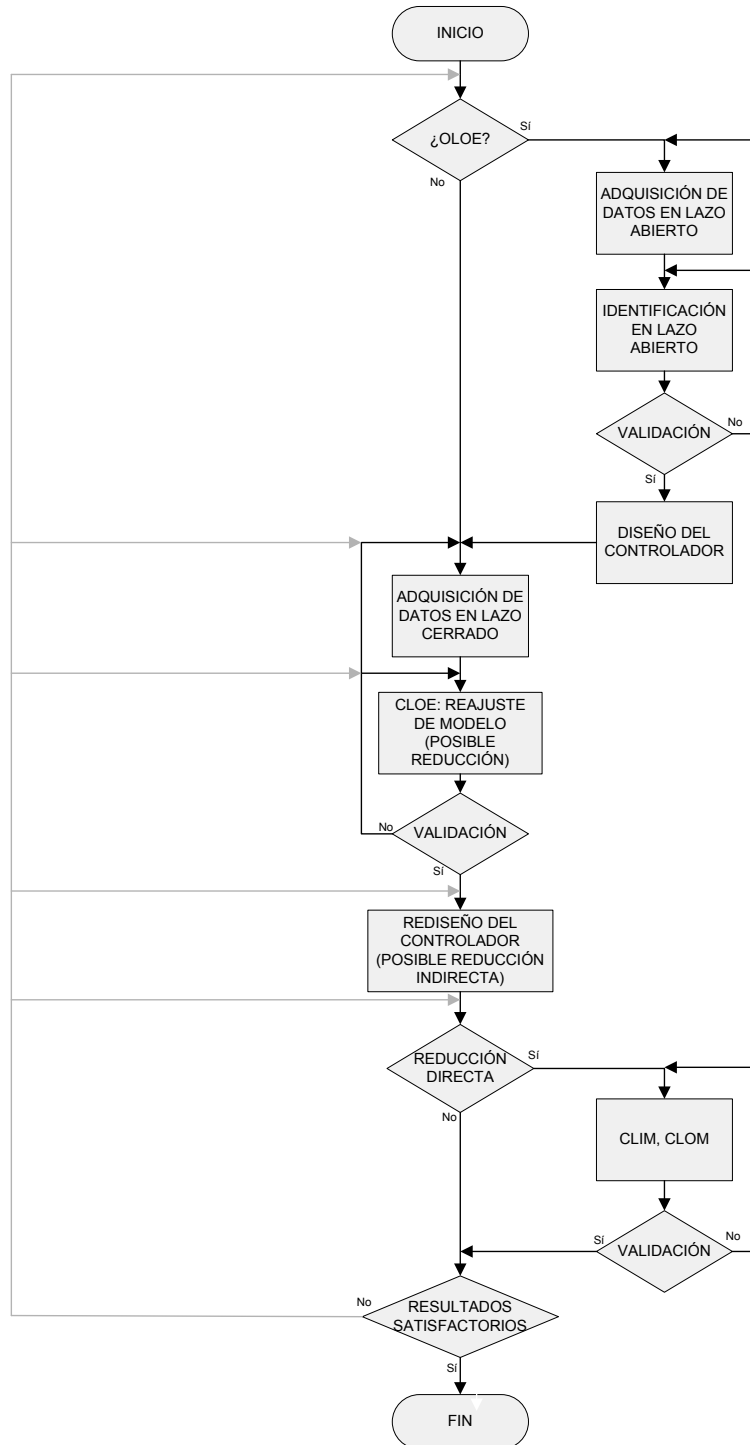


Figura 6.1: Procedimiento de identificación en lazo cerrado.

En la Figura 6.1, OLOE se refiere a la posibilidad de llevar a cabo un proceso de identificación en lazo abierto. El procedimiento mostrado abarca la estimación de un modelo y reajuste del mismo y la posible reducción del controlador empleado. Este procedimiento se propone de acuerdo a las capacidades de los algoritmos estudiados, analizados y desarrollados (algoritmos de identificación en lazo cerrado y de diseño de controladores robustos) y forma parte de los resultados obtenidos de la presente investigación.

A manera de conclusión final se dice que la hipótesis fue comprobada, ya que con el análisis y la asimilación de la identificación de sistemas en lazo cerrado con estructura tipo CLOE, se logró desarrollar una herramienta que permite llevar a cabo la estimación y reajuste de modelos de sistemas dinámicos, la reducción del orden de controladores y el cálculo de los mismos.

6.2. Trabajos futuros propuestos

Durante el desarrollo del presente trabajo se encontraron diferentes aspectos que se pueden investigar, los cuales se comentan a continuación:

- **Identificación de sistemas en lazo cerrado multivariable.** Una vez que se analizaron los algoritmos de identificación de sistemas en lazo cerrado con estructura tipo CLOE, resultaría interesante verificar si estos podrían ser empleados para realizar estimación de modelos de sistemas multivariados (MIMO, SIMO o MISO), ya que el presente trabajo sólo abarcó la estimación de modelos lineales SISO en forma de función de transferencia.
- **Automatización del cálculo de un controlador robusto.** En el presente documento, sección 4.4, se presentó una técnica sencilla para el cálculo de un controlador robusto, ésta se basa en la técnica de colocación de polos [AsW95], [AsW97] y en la calibración o ajuste de la función de sensibilidad a la salida, S_{yp} . El proceso para el cálculo del controlador es de manera iterativa, ya que primero se resuelve la ecuación de *Bezout* y después se verifica que la S_{yp} se encuentre dentro de ciertos límites (márgenes de robustez); si al resolver la ecuación de *Bezout* se obtiene una S_{yp} que no se encuentra dentro de los límites, se procede a variar algunos parámetros y calcular nuevamente el controlador. En [LL99] se encontró que es posible “automatizar” el cálculo de este controlador al utilizar una parametrización Youla-Kucera [VdH97] y un proceso de optimización convexa como el que se presenta en [RM94]. Por tal motivo sería interesante estudiar la manera de incorporar estas técnicas para el cálculo un controlador, dentro de la herramienta desarrollada en el presente trabajo.

Referencias

- [Alf03] V.M. Alfaro. Métodos de sintonización de controladores pid que operan como servomecanismos. *Ingeniería*, 13(1,2):13–29, 2003.
- [Alv01] V.M. Alvarado. *Identification et commande des systèmes de propagation faiblement amortis. Application à l'atténuation du bruit dans les conduits de ventilation*. Tesis de doctorado, Institut National Polytechnique de Grenoble, Septembre 2001.
- [AMH78] B. Anderson, J. Moore, and R. Hawkes. Model approximation via prediction error identification. *Automatica*, 14:615–622, 1978.
- [AsB65] K. Åström and T. Bohlin. Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records. In *IFAC Symposium on Self-Adaptive Systems*, Teddington, UK, 1965.
- [AsE71] K. Åström and P. Eykhoff. System identification - a survey. *Automatica*, 7:123–162, 1971.
- [AsW95] K.J. Åström and B. Wittenmark. *Adaptive Control*. Addison Wesley, second edition, 1995.
- [AsW97] K.J. Åström and B. Wittenmark. *Computer-Controlled Systems, theory and design*. Prentice Hal, third edition, 1997.
- [Bar92] E. Barrull. *Análisis del comportamiento verbal articulatorio en conversaciones grupales espontáneas*. Tesis doctoral, Universidad de Barcelona, 1992.
- [Bia02] Gianni Bianchini. Synthesis of robust strictly positive real discrete-time systems with l_2 parametric perturbations. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 49(8):1221–1225, August 2002.
- [BJ70] G. Box and G. Jenkins. *Time series analysis, forecasting and control*. Holden-Day, Oakland, California, 1970.

- [CA00] J.C. Carmona and V.M. Alvarado. Active noise control of a duct using robust control theory. *IEEE Transactions on control systems technology*, 8(6):930–938, November 2000.
- [Gev04] M. Gevers. On the development of system identification. In *CESAME - UCL Louvain-la-Neuve*, Belgium, November 11 2004.
- [HK65] B. Ho and R. Kalman. Effective construction of linear state-variable models from input-output functions. *Regelungstechnik*, 12:545–548, 1965.
- [KL98] A. Karimi and I.D. Landau. Comparison of the closed-loop identification methods in terms of the bias distributions. *System and Control letters archive*, 34 Issue 4:159–167, July 1998.
- [Lan02] I.D. Landau. *Commande des systèmes, conception, identification et mise en œuvre*. Hermes Science publications, Paris, 2002.
- [Lan04] I.D. Landau. Identification in closed loop, a powerful design tool (theory, algorithms, applications). France, Laboratoire d'Automatique de Grenoble, (INPG/CNRS), France, November 2004.
- [LC79] L. Ljung and P. Caines. Asymptotic normality of prediction error estimators for approximative system models. *Stochastics*, 3:29–46, 1979.
- [LCK00] I.D. Landau, A. Constantinescu, and A. Karimi. Direct controller order reduction by identification in closed loop applied to an active suspension. *Proceedings of the 39th IEEE. Conference on Decision and Control*, pages 4479–4484, December 2000.
- [LF98] L. Ljung and U. Forssell. Bias, variance and optimal experiment design: Some comments on closed loop identification. *Linköping University, Department of Electrical Engineering, Linköping, Sweden*, (S-581 83):1–12, September 1998.
- [Lju93] L. Ljung. Information contents in identification data from closed-loop operation. *Proceedings of the 32nd conference on decision and control*, 1:2248–2252, December 1993.
- [Lju99] L. Ljung. *System identification, theory for the user*. Prentice Hall PTR, USA, second edition, 1999.
- [LK95] I.D. Landau and A. Karimi. An output error recursive algorithm for unbiased identification in closed loop. *Automatica*, 33 Issue 5:933–938, May 1995.
- [LK96] I.D. Landau and A. Karimi. An extended output error recursive algorithm for identification in closed loop. *Proceedings of the 35th conference on Decision and Control*, pages 1405–1410, December 1996.

- [LK97] I.D. Landau and A. Karimi. Recursive algorithms for identification in closed-loop: A unified approach and evaluation. *Automatica*, 33(8):1499–1523, 1997.
- [LKC01] I.D. Landau, A. Karimi, and A. Constantinescu. Direct controller order reduction by identification in closed loop. *Automatica*, 37:1698–1702, 2001.
- [LL99] J. Langer and I.D. Landau. Combined pole placement/sensitivity function shaping method using convex optimization criteria. *Automatica*, 35:1111–1120, 1999.
- [LLR99] J. Langer, I.D. Landau, and A. Rantzer. Pole placement with sensitivity function shaping for a set of models via convex optimization. *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control*, pages 1391–1396, December 1999.
- [LR94] I.D. Landau and F. Rolland. An approach for closed loop system identification. *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*, pages 4164–4169, December 1994.
- [LZ05] I.D. Landau and G. Zito. *Página de internet del libro: Digital control systems*, http://landau-bookic.lag.ensieg.inpg.fr/english/index_ENG_Fichiers.htm. Springer, 2005.
- [Oga98] Katsuhiko Ogata. *Ingeniería de control moderna*. PEARSON: Prentice - Hall, third edition, 1998.
- [Riv04] D.E. Rivera. Identificación de sistemas para aplicaciones en el control de procesos. In Arizona State University, editor, *Curso de especialización en automática*, Calpe, Alicante, Mayo 2004. Departamento de ingeniería química y de materiales.
- [RM94] A. Rantzer and A. Megretski. A convex parametrization of robustly stabilizing controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(9):1802–1808, September 1994.
- [SC91] C.A. Smith and A.B. Corripio. *Control automático de procesos, teoría y práctica*. Limusa, primera edition, 1991.
- [SLG76] T. Söderström, L. Ljung, and I. Gustavsson. Identifiability conditions for linear multivariable systems operating under feedback. *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-21:837–840, 1976.
- [Val06] Guillermo. Valencia. Aplicación del control predictivo multivariable a una columna de destilación binaria. Tesis de maestría, CENIDET, Diciembre 2006.

-
- [VdH97] P.M.J. Van den Hof, *et. al.* Closid - a closed-loop system identification toolbox for matlab. *Prepr. 11th IFAC Symp. System Identification (SYSID97)*, 2:983–989, 1997.
- [VdH98] P.M.J. Van den Hof. Closed-loop issues in system identification. *Annual Reviews in Control*, 22:173–186, 1998.
- [VdHS95] P.M.J. Van den Hof and R.J.P. Schrama. Identification and control - closed-loop issues. *Automatica*, 31(12):1751–1770, 1995.
- [Vin93] Glenn. Vinnicombe. Frequency domain uncertainty and the graph topology. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(9):1371–1383, 1993.

Apéndice A

Funciones contenidas dentro del toolbox de identificación

Este apéndice esta dedicado a la descripción de las funciones contenidas dentro del toolbox de identificación desarrollado. El conjunto de dichas funciones permiten realizar un proceso de identificación de sistemas en lazo cerrado, como el que se mostró en la Figura 6.1.

Las funciones fueron creadas en MatLab[®] y SciLab[®], las cuales se listan a continuación en las Tablas A.1 y A.2, en dichas tablas también se muestra una breve descripción de las funciones¹.

A.1. Listado de funciones

Tabla A.1: Funciones en MatLab[®].

FUNCIÓN	DESCRIPCIÓN
<i>ana_rob.m</i>	Realiza un análisis gráfico de robustez.
<i>ana_rob2.m</i>	Realiza un análisis gráfico de robustez de dos sistemas.
<i>bezo_rst.m</i>	Calcula la solución de la ecuación de bezout.
<i>clim_rst.m</i>	Realiza la identificación del controlador con el algoritmo CLIM.
<i>cloe_rst.m</i>	Lleva a cabo una identificación de sistemas en lazo cerrado CLOE.

¹ Para más información acerca de las funciones, como pueden ser los parámetros de entrada y de salida, ver la ayuda de las mismas. En MatLab[®] y SciLab[®] teclear en el espacio de trabajo (work space): help “nombre de la función”.

<i>cloe_v.m</i>	Hace la validación de un modelo estimado.
<i>clom_rst.m</i>	Realiza la identificación del controlador con el algoritmo CLOM.
<i>dn_vinni.m</i>	Calcula la distancia normalizada de Vinnicombe.
<i>error_eval.m</i>	Determina los índices de desempeño.
<i>frater_sbpa.m</i>	Genera una señal binaria pseudo aleatoria.
<i>frater_sim.m</i>	Simula la salida en lazo abierto de un sistema.
<i>mcr.m</i>	Algoritmo recursivo de mínimos cuadrados.
<i>OLident.m</i>	Identificación de sistemas en lazo abierto.
<i>reduc_rst.m</i>	Realiza una reducción directa del controlador.
<i>sim_rst.m</i>	Simula la salida de un sistema en lazo cerrado.

Tabla A.2: Funciones en SciLab®.

FUNCIÓN	DESCRIPCIÓN
<i>ana_rob.sci</i>	Realiza un análisis gráfico de robustez.
<i>ana_rob2.sci</i>	Realiza un análisis gráfico de robustez de dos sistemas.
<i>bezo_rst.sci</i>	Calcula la solución de la ecuación de bezout.
<i>boden.sci</i>	Calcula la magnitud y fase de un sistema y genera gráficas normalizadas de las mismas.
<i>clim_rst.sci</i>	Realiza la identificación del controlador con el algoritmo CLIM.
<i>cloe_rst.sci</i>	Lleva a cabo una identificación de sistemas en lazo cerrado CLOE.
<i>cloe_v.sci</i>	Hace la validación de un modelo estimado.
<i>clom_rst.sci</i>	Realiza la identificación del controlador con el algoritmo CLOM.
<i>dn_vinni.sci</i>	Calcula la distancia normalizada de Vinnicombe.
<i>error_eval.sci</i>	Determina los índices de desempeño.
<i>frater_sbpa.sci</i>	Genera una señal binaria pseudo aleatoria.
<i>frater_sim.sci</i>	Simula la salida en lazo abierto de un sistema.
<i>funciones.sce</i>	Carga en el espacio de trabajo a las funciones del toolbox.
<i>mcr.sci</i>	Algoritmo recursivo de mínimos cuadrados.
<i>oloe.sci</i>	Identificación de sistemas en lazo abierto.
<i>reduc_rst.sci</i>	Realiza una reducción directa del controlador.
<i>sim_rst.sci</i>	Simula la salida de un sistema en lazo cerrado.
<i>tfun.sci</i>	Genera una función de transferencia (discreta o continua) con base en los polinomios del numerador y denominador.

A.2. Manual de usuario

En esta sección se proporciona información más detallada sobre las funciones contenidas en el toolbox de identificación en lazo cerrado.

ana_rob.m (.sci)

`ana_rob(Syp)`

Función que presenta un análisis gráfico de la función de sensibilidad a la salida, S_{yp} , de un sistema en lazo cerrado (empleando un controlador RST digital).

El resultado se presenta gráficamente al graficar el bode (respuesta en frecuencia) de la función de sensibilidad, junto con los márgenes de robustez (ganancia y retardo).

Parámetro de entrada:

Syp Función de sensibilidad a la salida del sistema en lazo cerrado.

ana_rob2.m (.sci)

`ana_rob2(Syp1,Syp2)`

Función que presenta un análisis gráfico de la función de sensibilidad a la salida, S_{yp} , de dos sistemas, para determinar la robustez de los controladores RST digital y comparar su similitud.

El resultado se presenta gráficamente al graficar los bodes de ambas funciones de sensibilidad, junto con los márgenes de robustez (ganancia y retardo).

Parámetros de entrada:

Syp1 Función de sensibilidad a la salida del sistema 1 (“real”).

Syp2 Función de sensibilidad a la salida del sistema 2 (“estimado”).

bezo_rst.m (.sci)

$[Rp, Sp, T] = \text{bezo_rst}(A, B, Hs, Hr, P, ts)$

Función para resolver la ecuación de Bezout. Cálculo de un controlador RST digital por colocación de polos. Análisis de la robustez del controlador calculado.

Parámetros de salida:

- Rp Parte calculada del polinomio R del controlador.
- Sp Parte calculada del polinomio S del controlador.
- T Polinomio T del controlador RST (ganancia).

Parámetros de entrada:

- A Denominador de la planta.
- B Numerador de la planta (incluyendo al retardo).
- Hs Parte fija del polinomio S.
- Hr Parte fija del polinomio R.
- P Polinomio característico deseado (polos colocados por el usuario).
- ts Tiempo de muestreo.

Condición:

$np = nah + nbh - 1$, de lo contrario hay excedente de polos deseados

donde:

np = orden del polinomio característico deseado.

nah = orden del polinomio derivado de la convolución entre A y Hs.

nbh = orden del polinomio derivado de la convolución entre B y Hr.

boden.sci

$[mag, fase, frecn] = boden(sist)$

Función que devuelve las gráficas de Bode de magnitud y fase con la frecuencia normalizada. Los resultados se muestran en pantalla o se pueden tener los datos en los parámetros de salida.

La gráfica esta en forma lineal en las abscisas y ordenadas.

Parámetros de salida:

- mag Vector que contiene la magnitud del sistema en decibeles.
- fase Vector que contiene la fase del sistema en grados.
- frecn Vector que contienen la frecuencia normalizada.

Parámetros de entrada:

- sist Sistema en forma de función de transferencia.

clim_rst.m (.sci)

$[R_e, S_e, Ecl, uu, gm] = clim_rst(r, u, ns, nr, A, B, d, F_ini, lam0, lam1, Hr, Hs)$

Función que sirve para estimar el controlador (polinomios R y S que corresponden al numerador y denominador del controlador, respectivamente), el algoritmo empleado es el CLIM (Closed Loop Input Matching), este algoritmo puede ser utilizado para estimar un controlador de orden menor al original.

El algoritmo CLIM corresponde a un esquema de identificación en el cual la señal de referencia es aplicada a la entrada del controlador sumada con la salida del sistema en lazo cerrado. $T = R$.

El controlador tiene la siguiente forma:

$$P(q^{-1}) = A(q^{-1}) * Hs(q^{-1}) * S'(q^{-1}) + q^{-d} * B(q^{-1}) * Hr(q^{-1}) * R'(q^{-1})$$

donde:

$$Hs(q^{-1}) * S'(q^{-1}) = S(q^{-1})$$

$$Hr(q^{-1}) * R'(q^{-1}) = R(q^{-1})$$

Parámetros de salida:

- R_e Coeficientes estimados del numerador del controlador.
- S_e Coeficientes estimados del denominador del la controlador.
- Ecl Vector que contiene al error de predicción a la salida.
- uu Vector que contiene la señal de control estimada.
- gm Matriz que contiene la evolución de los parámetros estimados del controlador.

Parámetros de entrada:

- r Señal de referencia.
- u Señal de control.
- ns Orden de $S'(q^{-1})$.
- nr Orden de $R'(q^{-1})$.
- A, B Polinomios de la planta, denominador y numerador respectivamente.
- d Retardo puro del sistema.
- F_ini Ganancia inicial (ganancia de adaptación).
- lam0, lam1 Parámetros de ajuste del algoritmo de mínimos cuadrados.
- Hr Parte fija del polinomio $R(q^{-1})$ del controlador.
- Hs Parte fija del polinomio $S(q^{-1})$ del controlador.

Las partes fijas comunes para el controlador RST son las siguientes:

$Hs(q^{-1}) : 1 - q^{-1}$ (integrador)

$Hr(q^{-1}) : 1 + q^{-1}$ (abrir el lazo para rechazar señales a frecuencias mayores a la mitad de la frecuencia de muestreo)

Las partes fijas comunes, descritas anteriormente, pueden elevarse a alguna potencia “n”, según necesidades de desempeño o robustez.

cloe_rst.m (.sci)

$[A_e, B_e, Ecl, yy, u_e, th] = cloe_rst(r, y, na, nb, d, R, S, T, F_ini, lam0, lam1)$

Función para obtener los coeficientes estimados de los polinomios que forman una función de transferencia A (denominador) y B (numerador), de un sistema trabajando en lazo cerrado, empleando un controlador RST.

Parámetros de salida:

- A_e Coeficientes estimados del denominador de la planta (polinomio A).
- B_e Coeficientes estimados del numerador de la planta (polinomio B).
- Ecl Vector que contiene al error de predicción a la salida.
- yy Vector que contiene la salida estimada en lazo cerrado.
- u_e Vector que contiene la señal de control estimada.
- th Matriz que contiene la evolución de los parámetros estimados de la planta.

Parámetros de entrada:

- r Señal de referencia.
- y Señal de salida en lazo cerrado.
- na Orden de A (denominador).
- nb orden de B (numerador).
- R,S,T Polinomios del controlador RST.
T = R : referencia añadida a la entrada del controlador.
T = S : referencia añadida a la salida del controlador.
- d Retardo puro del sistema.
- F_ini Ganancia inicial F(0) (ganancia de adaptación).
- lam0,lam1 Parámetros de ajuste del algoritmo de mínimos cuadrados.

cloe_v.m (.sci)

$$[RNmax, Ree] = cloe_v(Alc, Blc, A_e, B_e, na, nb, d, R, S, T, ts, Ecl, ye, tt)$$

Función que realiza la validación de un modelo estimado. Validación en el dominio del tiempo, validación en el dominio de la frecuencia, distancia entre polos en lazo cerrado y validación estadística.

Parámetros de salida:

RNmax Vector que contiene el valor máximo de la correlación entre el error de estimación (Ecl) y la salida estimada (\hat{y}), y la correlación entre el error de estimación (Ecl) y la señal de control estimada (\hat{u}).

$$RNmax = [RNmax(Ecl - \hat{y}) \quad RNmax(Ecl - \hat{u})].$$

Ree Correlación del error.

Parámetros de entrada:

Acl Polinomio característico del sistema “real” en lazo cerrado.

Bcl Numerador del sistema “real” en lazo cerrado.

A_e Denominador estimado de la planta.

B_e Numerador estimado de la planta.

na,nb Órdenes de A y B.

d Retardo (valor absoluto).

R,S,T Polinomios del controlador RST digital.

ts Tiempo de muestreo utilizado.

Ecl Vector que contiene el error: $Ecl(t) = y(t) - \hat{y}(t)$.

ye Vector de salidas estimadas del sistema $[\hat{y}(1) \dots \hat{y}(N)]$.

ue Vector de señales de control estimadas del sistema $[\hat{u}(1) \dots \hat{u}(N)]$.

tt Tiempo que se desea simular las señales escalón e impulso (tienen que ser un múltiplo de ts).

clom_rst.m (.sci)

$$[R_e, S_e, Ecl, uu, gm] = clom_rst(r, u, ns, nr, A, B, d, F_ini, lam0, lam1, Hr, Hs)$$

Función que sirve para estimar el controlador (polinomios R y S que corresponden al numerador y denominador del controlador, respectivamente), el algoritmo empleado es el CLOM (Closed Loop Output Matching), este algoritmo puede ser utilizado para estimar un controlador de orden menor al original.

El algoritmo CLOM corresponde a un esquema de identificación en el cual la señal

de referencia es aplicada a la entrada de la planta sumada con la señal de control. $T = S$.

El controlador tiene la siguiente forma:

$$P(q^{-1}) = A(q^{-1}) * Hs(q^{-1}) * S'(q^{-1}) + q^{-d} * B(q^{-1}) * Hr(q^{-1}) * R'(q^{-1})$$

donde:

$$Hs(q^{-1}) * S'(q^{-1}) = S(q^{-1})$$

$$Hr(q^{-1}) * R'(q^{-1}) = R(q^{-1})$$

Parámetros de salida:

- R_e Coeficientes estimados del numerador del controlador (polinomio R).
- S_e Coeficientes estimados del denominador del controlador (polinomio S).
- Ecl Vector que contiene al error de predicción a la salida.
- uu Vector que contiene la señal de control estimada.
- gm Matriz que contiene la evolución de los parámetros estimados del controlador.

Parámetros de entrada:

- r Señal de referencia.
- u Señal de control.
- ns Orden de $S'(q^{-1})$.
- nr Orden de $R'(q^{-1})$.
- A, B Polinomios de la planta, denominador y numerador respectivamente.
- d Retardo puro del sistema.
- F_ini Ganancia inicial (ganancia de adaptación).
- lam0, lam1 Parámetros de ajuste del algoritmo de mínimos cuadrados.
- Hr Parte fija del polinomio $R(q^{-1})$ del controlador.
- Hs Parte fija del polinomio $S(q^{-1})$ del controlador.

Las partes fijas comunes para el controlador RST son las siguientes:

$$Hs(q^{-1}) : 1 - q^{-1} \text{ (integrador)}$$

$Hr(q^{-1}) : 1 + q^{-1}$ (abrir el lazo para rechazar señales a frecuencias mayores a la mitad de la frecuencia de muestreo)

Las partes fijas comunes, descritas anteriormente, pueden elevarse a alguna poten-

cia “n”, según necesidades de desempeño o robustez.

dn_vinni.m (.sci)

$$[dv] = dn_vinni(N1, D1, N2, D2, ts)$$

Función que calcula la distancia normalizada entre dos funciones de transferencia (distancia normalizada de Vinnicombe).

Parámetro de salida:

dv Distancia normalizada de Vinnicombe ($0 < dv < 1$).

Parámetros de entrada:

N1 Numerador de la función de transferencia discreta 1.

D1 Denominador de la función de transferencia discreta 1.

N2 Numerador de la función de transferencia discreta 2.

D2 Denominador de la función de transferencia discreta 2.

ts Tiempo de muestreo.

error_eval.m (.sci)

$$[E] = error_eval(e)$$

Función que determina los índices de desempeño (en lazo cerrado) basados en la señal de error (diferencia entre salidas temporales):

1. IAE: integral del error absoluto.
2. ITAE: integral del tiempo por el error absoluto.
3. ISE: integral del error cuadrático.
4. ITSE: integral del tiempo por al error cuadrático.
5. ISTSE: integral del tiempo cuadrático por el error cuadrático.
6. MSE: media del error cuadrático.
7. MCE: error medio cuadrático.

Parámetro de salida:

E Vector que contiene los índices de desempeño (en el orden presentado anteriormente).

Parámetro de entrada:

e Vector que contiene al error a la salida (diferencia entre la salida de la planta real y la estimada).

frater_sbpa.m (.sci)

sbpa = frater_sbpa(n, tim, ts)

Función que genera una señal binaria pseudo aleatoria (SBPA)

Parámetro de salida:

sbpa señal binaria pseudo aleatoria.

Parámetros de entrada:

n Orden de N_b (bits) que genera la SBPA.
 tim Tiempo de establecimiento del sistema (t_r) al cual se va a aplicar la SBPA, en segundos.
 ts Tiempo de muestreo (T_m), en segundos.

frater_sim.m (.sci)

y = frater_sim(r,B,A,d)

Función que simula la respuesta de un proceso en lazo abierto, a diferencia de la función *lsim.m* de MatLab[®], esta función permite calcular la salida sin importar que la función de transferencia de la planta sea impropia.

Parámetro de salida:

y Vector que contiene la salida del sistema simulado.

Parámetros de entrada:

r Señal de referencia.
 B Numerador $b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots$
 A Denominador $1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots$
 d Retardo del sistema $G(q^{-1}) = q^{-d}B(q^{-1})/A(q^{-1})$.
 Si no se ingresa este valor, se considera como cero.

funciones.sce

Cuando se corre este programa, se cargan y compilan todas las funciones contenidas dentro del toolbox, esta función se usa exclusivamente dentro de SciLab[®].

Una vez que se corre este programa, es posible utilizar todas las funciones listadas anteriormente (para SciLab[®]), ya sea en el espacio de trabajo (work space) o en el editor de programas (scipad).

mcr.m (.sci)

$[theta_e, F_e, lam1] = mcr(theta, phi, F, e_cl, lam0, lam1)$

Función que ejecuta el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados, con tres formas distintas de evolución de la ganancia de adaptación.

Parámetros de salida:

theta Vector de parámetros (coeficientes) nuevo $\theta(t + 1)$.
 F_e Ganancia de adaptación nueva $F_e(t + 1)$.
 lam1 Nuevo valor del parámetro de ajuste λ_1 .

Parámetros de entrada:

theta Vector de parámetros (coeficientes) actual $\theta(t)$.
 vphi Vector de regresión (entradas y salidas estimadas).
 F Ganancia de adaptación actual $F(t)$.
 e_cl Error (diferencia entre la salida real y la estimada).
 lam0 Parámetro λ_0 .
 lam1 Parámetro λ_1 .

** $\lambda_2 = 1$

Tipos de ganancia de adaptación:

$lam0 = lam1 = 1$: ganancia decreciente.

$lam0 = 1, \quad 0 < lam1 < 1$: factor de olvido fijo.

$0.9 < lam0 < 1, \quad 0.9 < lam1 < 1$: factor de olvido variable.

OLident.m

$$[ARX, OE] = OLident(data, lim)$$

Este programa permite llevar a cabo un proceso de identificación en lazo abierto empleando las funciones contenidas en MatLab[®], las estructuras que maneja este programa son la ARX y la OE (ver [Lju99]), siendo esta última la que se puede comparar directamente con un resultado obtenido a través de un proceso de identificación con estructura tipo CLOE.

Esta función utiliza las rutinas contenidas en MatLab[®] para la estimación de modelos, se lleva a cabo una validación del modelo y se realiza la selección de órdenes: nk = retardo puro del sistema, para la estructura ARX y OE; nb = numerador de la estructura ARX y OE; na = denominador de la estructura ARX y nf = denominador de la estructura OE.

Cada uno de los resultados que se obtengan se grafican, la selección del mejor modelo se hace con ayuda de dichas gráficas. Se comparan también los datos reales con los estimados.

Existe una versión desarrollada en cenidet para la identificación de sistemas en lazo abierto, denominada CaToKi[®]; la cual puede ser una alternativa a la presente función para lograr la estimación de un modelo. Para más información de esta herramienta contactar al Dr. Victor Alvarado (Profesor-Investigador del CENIDET).

Parámetros de salida:

ARX Modelo estimado con estructura ARX.
 OE Modelo estimado con estructura OE.

Parámetros de entrada:

data Vector de datos de entrada y salida del sistema.
 emplear: *iddata.m*
 lim Límite máximo de los órdenes de los sistemas a estimar.

oloe.sci

$$[A, B, ye, th] = oloe(r, y, na, nb, d, F_ini, lam0, lam1)$$

Función utilizada para identificar una planta en lazo abierto empleando el algoritmo OE (Output Error). El resultado es presentado en forma de polinomios discretos (numerador y denominador) que componen al modelo estimado.

Parámetros de salida:

- A Denominador del modelo estimado. $1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{n_A}q^{-n_A}$
- B Numerador del modelo estimado. $b_1q^{-1} + \dots + b_{n_B}q^{-n_B}$
- ye Salida estimada en lazo abierto.
- th Matriz que contiene la evolución de los parámetros estimados.

Parámetros de entrada:

- r Señal de referencia.
- y Salida en lazo abierto del sistema a identificar.
- na Orden del denominador.
- nb Orden del numerador.
- d Retardo puro del sistema.
- F_ini Valor inicial de la ganancia de adaptación.
- lam0, lam1 Parámetros de ajuste del algoritmo de mínimos cuadrados.
 $0.9 < lam0 < 1$
 $0.9 < lam1 < 1$

reduc_rst.m (.sci)

$[err, ind] = \text{reduc_rst}(r, u, B, A, R, S, T, F_ini, lam0, lam1, tlim, d, ts, j, Hr, Hs)$

Función auxiliar para encontrar un controlador de orden menor, con base en iteraciones a partir de un orden menor a un orden mayor para los polinomios R y S del controlador. El límite de los órdenes para dichas iteraciones estará dado por el orden de R y S del controlador original.

Parámetros de salida:

- err Matriz que contiene el error y las distancias normalizadas de Vinnicombe generados por todos los controladores calculados por la función, de manera iterativa.
- ind Matriz que contiene los órdenes de los polinomios R y S que corresponden a un determinado error y distancia normalizada de Vinnicombe.

Por ejemplo, si en la matriz “err” el elemento 23 corresponde al error y distancia normalizada de Vinnicombe menores, entonces se debe buscar a que órdenes de los polinomios R y S corresponde. Dichos órdenes estarán en el elemento 23 de la matriz “ind”, que podría ser (por ejemplo) $\text{ind}(23,:) = [75]$.

La columna 1 de la matriz “err” corresponde a los errores calculados ante una respuesta temporal (escalón unitario) entre el controlador original y el controlador cal-

culado con órdenes menores, la columna 2 de la misma matriz corresponde a la distancia normalizada de Vinnicombe entre el controlador original y el respectivo controlador calculado con órdenes menores.

La columna 1 de la matriz “ind” corresponde al orden del polinomio S; mientras que la columna 2 de la misma matriz, corresponde al orden del polinomio R.

Parámetros de entrada:

r	Señal de referencia (P.ej. SBPA).
u	Señal de control.
B, A	Numerador y denominador de la planta.
R, S, T	Polinomios del controlador del controlador.
F_ini	Ganancia inicial de adaptación.
lam0, lam1	Parámetros de ajuste del algoritmo de mínimos cuadrados.
tlim	Tiempo de simulación de prueba escalón (segundos).
d	Retardo puro del sistema.
ts	Tiempo de muestreo.
j	Algoritmo de reducción del controlador. j=1: CLIM. j=2: CLOM.
Hr, Hs	Partes fijas de los polinomios R y S respectivamente.

sim_rst.m (.sci)

$$[y, u] = \text{sim_rst}(r, B, A, R, S, T, d, \text{sel})$$

Función que simula la respuesta en lazo cerrado de un proceso, a diferencia de la función `lsim.m` de MatLab, esta función permite calcular la salida de un sistema en lazo cerrado aunque la función de transferencia de la planta sea impropia².

Parámetros de salida:

- y Vector que contiene la salida del sistema simulado en lazo cerrado.
- u Vector que contiene la señal de control.

Parámetros de entrada:

² Orden del numerador mayor que el orden del denominador.

r	Señal de referencia.
B	Numerador $b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots$
A	Denominador $1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots$
R, S, T	Polinomios correspondientes a un controlador RST.
d	Retardo puro del sistema $G(q^{-1}) = q^{-d}B(q^{-1})/A(q^{-1})$.
sel	Parámetro que se utiliza para seleccionar de donde se tomará la señal de control que se desea, en el sentido de que si la misma será utilizada para ser aplicada en un algoritmo de identificación para reducir el orden del controlador.

Si se utilizará el algoritmo CLIM: sel = 1.

Si se utilizará el algoritmo CLOM: sel = 2.

tfun.sci

`sys = tfun(Num,Den,ts)`

Función que calcula una función de transferencia en tiempo discreto o continuo, dados los vectores que contienen a los coeficientes del numerador y denominador.

Parámetro de salida:

sys Función de transferencia.

Parámetros de entrada:

Num Numerado deseado de la función de transferencia.

Den Denominador deseado de la función de transferencia.

ts Tiempo de muestreo en segundos.

Si no se ingresa un tiempo de muestreo se infiere que el sistema se desea representar en tiempo continuo.

Apéndice B

Definición de una función de transferencia discreta ERP

En el Capítulo 2 se describieron las características del algoritmo recursivo de mínimos cuadrados (MCR) (el cual fue empleado como algoritmo de adaptación paramétrica), dichas características fueron: convergencia a parámetros (ambientes determinístico y estocástico) y estabilidad y robustez.

En el mismo capítulo se mencionó que la condición para lograr convergencia a parámetros y estabilidad y robustez, de acuerdo con los Teoremas 2.1, 2.2 y 2.3 es que

$$E'(q^{-1}) = E(q^{-1}) - \frac{\lambda}{2}, \quad \sup_t \lambda_2(t) \leq \lambda \leq 2, \quad (\text{B.1})$$

sea estrictamente real positiva (ERP).

La definición de una función de transferencia discreta estrictamente real positiva es [Bia02]:

Definición B.1. Se dice que una función de transferencia en tiempo discreto

$$\Omega(z^{-1}) = \frac{N_\Omega(z^{-1})}{D_\Omega(z^{-1})} \quad (\text{B.2})$$

es estrictamente real positiva (ERP) si:

1. $N_{\Omega}(z^{-1}), D_{\Omega}(z^{-1}) \in S_{|z|<1}$;
2. $\text{Re}[\Omega(e^{-j\omega})] > 0 \quad \forall \omega \in [0, 2\pi]$.

Donde:

- | | |
|--|---|
| z | Variable compleja; |
| $N_{\Omega}(z^{-1}), D_{\Omega}(z^{-1})$ | Polinomios en tiempo discreto; |
| $S_{ z <1}$ | Conjunto de polinomios en z^{-1} cuyas raíces se encuentran dentro de $ z < 1$. |

□

Para el caso en el cual se aplica el algoritmo CLOE, se cumple generalmente con la Definición B.1 ya que, de la ecuación (B.1):

$$E(q^{-1}) = \frac{S(q^{-1})}{P(q^{-1})} \quad (\text{B.3})$$

donde $S(q^{-1})$ es el polinomio correspondiente al denominador del controlador, y $P(q^{-1})$ es el polinomio característico (numerador) del sistema en lazo cerrado.

Apéndice C

Descripción de una señal binaria pseudo aleatoria (SBPA)

En este apéndice se presenta la descripción de una señal binaria pseudo aleatoria (SBPA) y la manera de generarla.

Una señal binaria pseudo aleatoria es una sucesión de pulsos rectangulares modulados en anchura, que se aproxima a un ruido blanco discreto y en consecuencia posee un contenido rico en frecuencias [Lan02].

Se le llama *pseudo aleatoria* ya que está caracterizada por una longitud de secuencia dentro de la cual las variaciones de la anchura de sus pulsos varían aleatoriamente, pero, sobre un gran horizonte de tiempo, son periódicas, dado que se definió el período por la longitud de la secuencia.

C.1. Generación de una SBPA

La señal binaria pseudo aleatoria es generada por la siguiente ecuación de diferencias:

$$SBPA(t) = \text{rem}(\chi_1 u(t-1) + \chi_2 u(t-2) + \dots + \chi_n u(t-n), 2) \quad (\text{C.1})$$

en la ecuación (C.1), $\text{rem}(\chi, 2)$ es el residuo de la división de χ entre 2, de tal manera que $SBPA(t)$ únicamente asume los valores de 0 o 1; después de que se generó a la $SBPA(t)$ es posible cambiar esos niveles por otros dos diferentes.

La longitud máxima (L) de la SBPA está dada por la siguiente expresión

$$L = 2^{N_b} - 1 \quad (\text{C.2})$$

Para cada N_b existirán selecciones del orden de $\chi(q^{-1})$ que proporcionen la longitud máxima de una SBPA; en la Tabla C.1 se muestran algunas selecciones para poder obtener una longitud máxima, L .

Tabla C.1: Generación de una SBPA.

Orden de N_b	Longitud de la secuencia $L = 2^{N_b} - 1$	Coefficientes $\chi_k \neq 0$ para k
2	3	1 y 2
3	7	2 y 3
4	15	1 y 4
5	31	2 y 5
6	63	1 y 6
7	127	3 y 7
8	255	1, 2, 7 y 8
9	511	4 y 9
10	1023	7 y 10
11	2047	9 y 11

A continuación se listan las características que se deben de tomar en cuenta en lo referente a la generación de una SBPA.

- Magnitud: Un porcentaje pequeño de la entrada del sistema en el punto de operación.
- Frecuencia de reloj: $f_{clock} = (\frac{1}{p})f_m$

donde:

$f_m =$ frecuencia de muestreo.

$p =$ decimación o re-muestreo y puede tomar valores de: 1, 2, 3, ...

La decimación de la SBPA depende del tiempo de subida del sistema (t_r) y del tiempo de muestreo (T_m), la manera de calcularlo es la siguiente:

$$p = \frac{t_r}{N_b T_m} \quad (\text{C.3})$$

sí el valor de p resulta fraccionario se toma el entero siguiente; por ejemplo si el resultado de la ecuación (C.3) es 2.1, entonces se toma $p = 3$.

- Duración de la señal: $(2^{N_b} - 1)pT_m$

donde:

$N_b = \text{Número de bits.}$

$T_m = \text{Tiempo de muestreo } (T_m = 1/f_m)$

- Duración del pulso más ancho: $N_b p T_m$

La longitud de la señal debe de ser menor que la duración máxima permitida para la realización de un experimento; y la duración del pulso más ancho debe de ser igual o mayor que el tiempo de subida (t_r), como se muestra en la Figura C.1.

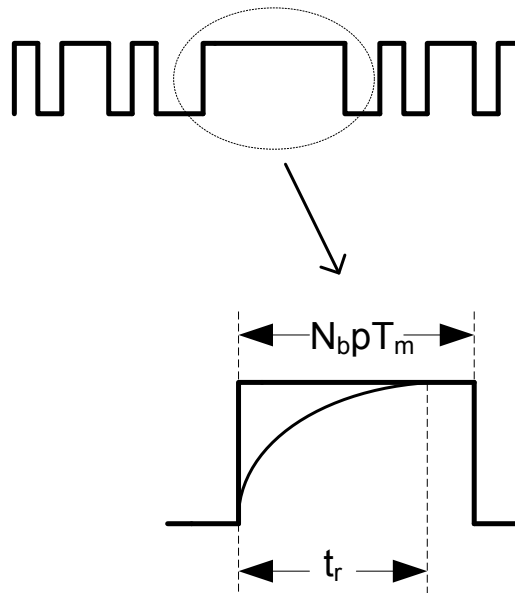


Figura C.1: Pulso más ancho

Apéndice D

Distribución del error de predicción en lazo cerrado

En el presente trabajo también se hizo un análisis de la distribución del error de predicción en lazo cerrado, $\varepsilon_{LC}(t + 1)$. Esto con la finalidad de comprobar la teoría acerca del mismo.

En la [Lju99] se maneja al error de predicción como un conjunto de datos que tiene una distribución tipo *gaussiana* (g). Para corroborar lo anterior se utilizaron los vectores de error generados durante la identificación en lazo cerrado de un sistema real implementado en el laboratorio (filtro de segundo orden, Figura 5.14); los resultados fueron los siguientes:

- Para el error de predicción en lazo cerrado, que se generó usando un esquema de identificación como el de la Figura 2.1:

$$\text{mediana} = 0.001588$$

$$\text{media} = 0.006207$$

$$\text{varianza} = 0.005608254$$

la curva de la distribución para este conjunto de datos (error) se presenta en la Figura D.1.

- Para el error de predicción en lazo cerrado, que se generó empleando un esquema de identificación como el de la Figura 4.2:

$$\text{mediana} = -0.0003485$$

$$\text{media} = 0.006661$$

$$\text{varianza} = 0.01512514$$

la curva de la distribución para este conjunto de datos (error) se presenta en la Figura D.2.

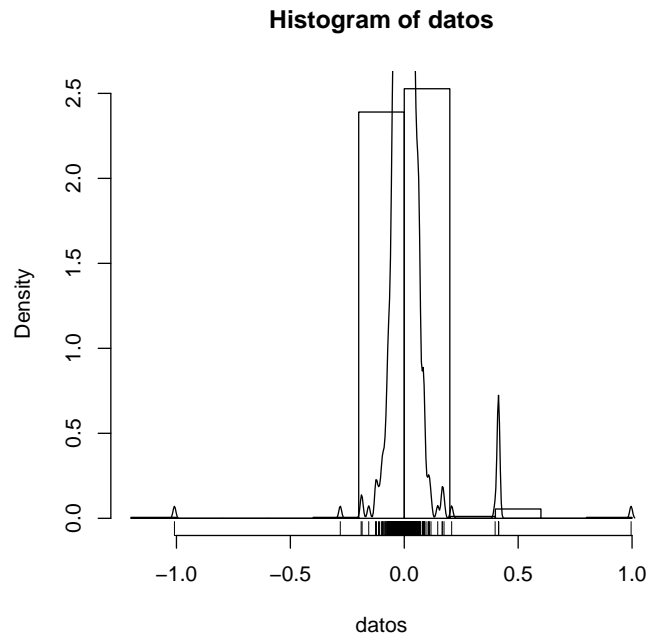


Figura D.1: *Distribución del error 1.*

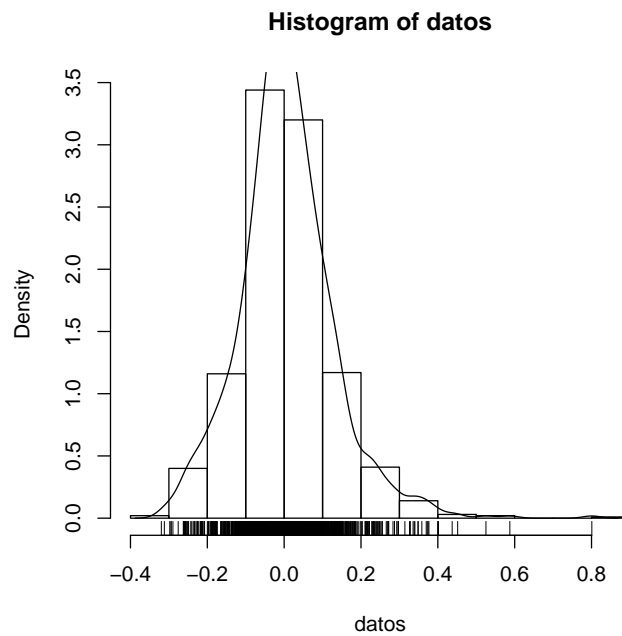


Figura D.2: *Distribución del error 2.*

Como se logra apreciar en las Figuras D.1 y D.2, ambos conjuntos de datos (que contiene el error de predicción en lazo cerrado de los esquemas empleados), tienen la distribución considerada, que es en forma de campana.

Este tipo de análisis se realizó en la mayoría de los ejercicios de identificación en lazo cerrado elaborados, y se obtuvo el mismo resultado, una distribución tipo *gaussiana* (forma de campana). Sólo se mostraron los resultados provenientes del ejercicio experimental por que se consideró que eran los más significativos.

Para poder realizar las pruebas necesarias al los vectores que contienen el error de predicción $\varepsilon_{LC}(t + 1)$, se utilizó un lenguaje de programación de distribución libre, Lenguaje R[®]; éste se especializa en estadística y por ende cuenta con las rutinas necesarias para realizar análisis de este tipo.